Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica
"Informatica I", a.a. 2007-08

3 Esercitazione n^o 3: Integrazione

In molti casi reali la valutazione dell'integrale definito

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx$$

non è possibile, in tal caso si considera una *valutazione numerica* che approssima $I(f)$.

L'obiettivo è di ottenere il valore dell'integrale con la precisione richiesta e con il minore numero possibile di valutazioni della funzione integranda.

3.1 Integrale come somma

Il metodo più semplice consiste nell'eseguire una partizione del dominio di integrazione e nell'approssimare l'area sottesa dalla funzione tramite una *somma di rettangoli*. In particolare consideriamo la *formula di Eulero*.

3.1.1 Formula di Eulero

Dati N punti su cui valutare la funzione integranda si divida l'intervallo $[a, b]$ nei punti $x_i = a + i\ h$ con $h = (b - a)/(N - 1)$ e $i = 0, 1, \cdots, N - 2$, pertanto si consideri la seguente approssimazione

$$I(f) \approx h \sum_{i=0}^{N-2} f_i \qquad \text{dove } f_i = f(x_i)$$

Esercizio proposto Scrivere un programma per la valutazione di un integrale definito attraverso la formula di Eulero. Si fornisca l'intervallo di integrazione e il numero di punti su cui calcolare l'integrale. Si calcoli l'integrale per $N = \{10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6, 10^7\}$ e si valuti il corrispondente valore del passo h. Visualizzare il grafico del "valore vero" e del "valore approssimato" (dove possibile). Commentare i risultati.

3.2 Metodi interpolatori

In generale il calcolo numerico fornisce delle *formule di quadratura* per approssimare un integrale definito. Tali formule si basano sull'uso di funzioni elementari per interpolare la funzione integranda nei punti della partizione. In particolare consideriamo la *formula dei trapezi* (interpolazione lineare) e la *formula di Simpson* (interpolazione quadratica).

Nel calcolo dell'integrale è importante considerare l'errore relativo approssimato con cui si desidera valutare l'integrale: cioè valutare l'errore che si commette sul valore dell'integrale considerando due successive partizioni dell'intervallo di integrazione:

$$|Q_m(f) - Q_n(f)| < |Q_m(f)|\epsilon$$

Per sfruttare le valutazioni della funzione integranda all'iterazione precedente torna utile dimezzare di volta in volta i sottointervalli h: in tal caso si ha $m = 2n$.

3.2.1 Formula dei trapezi

Si divida l'intervallo $[a, b]$ nei punti $x_i = a + i\,h$, con $h = (b-a)/(N-1)$ e $i = 0, 1, \cdots, N-1$, e si consideri la seguente approssimazione

$$I(f) \approx Q_n(f) = h\left(\frac{1}{2}f_0 + f_1 \cdots + f_{n-2} + \frac{1}{2}f_{n-1}\right)$$

Esercizio proposto Scrivere una funzione che implementi la formula dei trapezi: la funzione ritorna il valore dell'integrale con la precisione (errore relativo approssimato) richiesta (e.g. 10^{-2} o 10^{-5}); come argomenti si considerano l'intervallo di integrazione, la precisione e la funzione integranda. Sfruttare le valutazioni ottenute alle iterazioni precedenti. Commentare i risultati anche in relazione a quanto ottenuto nell'esercizio precedente.

3.2.2 Formula di Simpson

Per sfruttare l'implementazione della formula dei trapezi utilizziamo la seguente relazione per la formula di integrazione di Simpson $\quad \frac{4}{3}Q_{2n}(f) - \frac{1}{3}Q_n(f)$

Esercizio proposto Scrivere una funzione che implementi la formula di Simpson attraverso l'uso della formula dei trapezi. Commentare i risultati e visualizzare i grafici delle valutazioni d'integrale definito, confrontandoli con quelli ottenuti nell'esercizio precedente.

3.3 Alcuni integrali definiti

Utilizzare le seguenti relazioni per testare gli esercizi proposti.

$$I(f) = \int_0^1 e^x dx = e - 1, \qquad I(f) = \int_0^1 \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}, \qquad I(f) = \int_0^1 \cos(x)dx = \sin(1),$$

$$I(f) = \int_{-3}^3 (x^2 + 0.1x - 1)dx, \qquad I(f) = \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{(x-0.3)^2 + 0.01} + \frac{1}{(x-0.9)^2 + 0.04} - 6\right) dx$$

Alcuni output di esempio dell'ultimo integrale con una precisione relativa di 10^{-5} e intervallo $[0, 1]$:

Formula dei trapezi

```
Passo 1:  Q=1.058824e+01
Passo 2:  Q=1.479412e+01
Passo 3:  Q=3.011407e+01
Passo 4:  Q=2.933118e+01
Passo 5:  Q=2.981083e+01
Passo 6:  Q=2.984626e+01
Passo 7:  Q=2.985531e+01
Passo 8:  Q=2.985757e+01
Passo 9:  Q=2.985813e+01
Passo10:  Q=2.985827e+01
```

Formula di Simpson

```
Passo 1:  Q=1.058824e+01
Passo 2:  Q=1.619608e+01
Passo 3:  Q=3.522072e+01
Passo 4:  Q=2.907021e+01
Passo 5:  Q=2.997071e+01
Passo 6:  Q=2.985808e+01
Passo 7:  Q=2.985833e+01
```