Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica
"Informatica I", a.a. 2007-08

4 Esercitazione n^o 4: Radici di un'equazione

Un compito importante nel calcolo numerico è risolvere equazioni non lineari: cioè trovare numericamente radici di funzioni (radice ξ di $f(x) = 0$ nell'intervallo $[a, b]$).

Prima di applicare un algoritmo è buona norma: (i) visualizzare la funzione, cioè conoscere, almeno approssimativamente, il suo andamento; (ii) assicurarsi che nell'intervallo scelto ci sia effettivamente una radice.

4.1 Criteri di convergenza

I metodi che consideriamo si basano su approssimazioni successive della radice, quindi è necessario considerare dei criteri di convergenza: cioè delle condizioni per arrestare l'algoritmo. In generale si deve valutare numericamente la radice approssimata x_n dell'equazione $f(x) = 0$ nell'intervallo $[a, b]$, con una precisione assoluta f_{tol} sul valore della funzione $f(x)$ e una precisione relativa x_{tol} sulla variabile indipendente.

Controllare:
(i) se $f(x_n) == 0$
(ii) se $|x_n - x_{n-1}| <= \epsilon_m \ (|a| + |b|)/2$
(iii) se $|f(x_n)| <= f_{tol}$ e se $|x_n - x_{n-1}| <= x_{tol} \ |x_n|$

4.2 Metodo di bisezione

Tale metodo è lento a raggiungere il valore della radice con la precisione richiesta, ma è *garantita la convergenza.* Il metodo consiste nel suddividere l'intervallo iniziale in due e scegliere come successivo intervallo quello tra i due che contiene ancora la radice.
I passi dell'**algoritmo** possono essere:

1. verificare esistenza radice nell'intervallo: $f(a)f(b) < 0$
2. inizializzare le variabili in modo che se $f(a) < 0$, $x_l = a$ e $x_h = b$ altrimenti "rovesciare" gli estremi.
3. ciclo: numero massimo di iterazioni
   (a) $x_m = 0.5\ (x_l + x_h)$
   (b) se $f(x_m) < 0$ allora $x_l = x_m$ altrimenti $x_h = x_m$
   (c) se $f(x_m) == 0$, return x_m
   (d) se $|x_h - x_l| <= 0.5\ \epsilon_m\ (|a| + |b|)$, return x_m
   (e) se $|f(x_m)| <= f_{tol}$ e se $|x_h - x_l| <= x_{tol}\ |x_m|$, return x_m
4. superato massimo numero iterazioni, return x_m

4.3 Metodo della regula falsi, delle secanti e delle tangenti

Questi metodi si basano sull'approssimazione della funzione con successive linearizzazioni, in tal modo hanno una velocità di convergenza maggiore, ma *non* è garantita la convergenza.

Si consideri x_{n+1} come approssimazione della radice ξ:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{k_n}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

1. Regula falsi:
$$k_n = \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}$$

2. Metodo delle secanti:
$$k_n = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

3. Metodo delle tangenti o di Newton-Raphson:
$$k_n = f'(x_n)$$

Notare che l'ultimo metodo richiede anche la *conoscenza della derivata*.
I passi dell'**algoritmo** possono essere:

1. verificare esistenza radice nell'intervallo: $f(a)f(b) < 0$
2. inizializzare le variabili (specifico del metodo scelto)
3. ciclo: numero massimo di iterazioni
   (a) $rt = x_n - f(x_n)/k_n$, con k_n specifico del metodo scelto
   (b) se $f(rt) == 0$, return rt
   (c) se $|rt - x_n| <= 0.5\ \epsilon_m\ (|a| + |b|)$, return rt
   (d) se $|f(rt)| <= f_{tol}$ e se $|rt - x_n| <= x_{tol}\ |rt|$, return rt
   (e) aggiornare le variabili (specifico del metodo scelto)
4. superato massimo numero iterazioni, return rt

Esercizio proposto Sviluppare una routine per ogni metodo considerato. Le routine ritornano il valore approssimato della radice e la causa di terminazione dell'algoritmo. Le routine hanno come argomenti l'intervallo $[a, b]$, la precisione assoluta $f_{tol} = 10^{-3}$, la precisione relativa $x_{tol} = 10^{-5}$ e la funzione $f(x)$ (e $f'(x)$ se necessario). Si deve fornire inoltre una routine per la funzione $f(x)$ e nel caso del metodo delle tangenti anche una routine che implementi la $f'(x)$ (in modo analitico).

Visualizzare la curva di convergenza per i diversi metodi: cioè come il valore dell'errore assoluto varia in funzione del passo di iterazione.

4.4 Alcune funzioni

Utilizzare le seguenti relazioni per testare gli esercizi proposti.

$$f1(x) = \sinh(x) - \frac{1}{x} \qquad \text{con intervallo [0.5,2] e } \xi = 0.932020$$

$$f2(x) = \cos^2(2x) - x^2 \qquad \text{con intervallo [0,1.5] e } \xi = 0.514933$$

$$f3(x) = (x - 0.1)^4 - 10 \qquad \text{con intervallo [0,2] e } \xi = 1.878279$$

$$f4(x) = \frac{1}{(x-0.3)^2 + 0.01} + \frac{1}{(x-0.9)^2 + 0.04} - 6 \qquad \text{con intervallo [-5,0.1] e } \xi = -0.131619$$

Alcuni output di esempio della funzione $f1(x)$ con precisione $x_{tol} = 10^{-5}$, $f_{tol} = 10^{-3}$ e intervallo $[0.5, 2]$:

Bisezione	Regula falsi	Secanti	Newton-Raphson
01: 1.250000	0.981648	0.981648	0.932838
02: 0.875000	0.943176	0.943176	0.932020
03: 1.062500	0.934618	0.931890	0.932020
04: 0.968750	0.932630	0.932020	
05: 0.921875	0.932163	0.932020	
06: 0.945313	0.932054		
07: 0.933594	0.932028		
08: 0.927734	0.932022		
09: 0.930664			
10: 0.932129			
11: 0.931396			
12: 0.931763			
13: 0.931946			
14: 0.932037			
15: 0.931992			
16: 0.932014			
17: 0.932026			
18: 0.932020			