Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica
"Informatica I", a.a. 2007-08

5 Esercitazione n^o 5: Minimi di funzioni

Consideriamo il problema della ricerca di massimi e minimi di funzioni di una variabile: in particolare, di trovare numericamente i minimi di funzioni (minimo ξ di $y = f(x)$ nell'intervallo $[a, b]$). Si osserva che un problema di ricerca di massimo su $f(x)$ equivale ad un problema di minimo su $-f(x)$.

5.1 Metodo "classico"

Un metodo classico per la ricerca di massimi e minimi di funzioni di una variabile è trovare gli zeri della derivata prima, controllare il segno della derivata seconda (calcolata nel valore dello zero) e quindi decidere se il valore trovato è un minimo o un massimo. Per la ricerca degli zeri si può utilizzare uno dei metodi numerici sviluppati precedentemente.

I passi dell'**algoritmo** possono essere:

1. calcolare la derivata prima e seconda della funzione
2. trovare gli zeri (x_{rt}) della derivata prima nell'intervallo assegnato
3. se $f''(x_{rt}) > 0$ allora x_{rt} è un minimo

Tuttavia nei casi reali non si può quasi mai usare questo metodo, pertanto consideriamo i due seguenti metodi che hanno invece applicazioni nei casi reali.

5.2 Metodi iterativi: sezione aurea

I passi dell'**algoritmo** possono essere:

1. inizializzare le variabili a_k, α_k, β_k e b_k: $\alpha_k = a_k + (1-r)(b_k - a_k)$ e $\beta_k = a_k + r(b_k - a_k)$, dove $r = (\sqrt{5} - 1)/2 \simeq 0.618034$ è la sezione aurea dell'intervallo.
2. ciclo: numero massimo di iterazioni
   (a) se $f(\alpha_k) \leq f(\beta_k)$, il minimo sarà localizzato in $[a_k, \beta_k]$, si sostituisce b_k con β_k
   (b) se $f(\alpha_k) > f(\beta_k)$, il minimo sarà localizzato in $[\alpha_k, b_k]$, si sostituisce a_k con α_k
   (c) si calcola $\xi_{min} = 0.5\ (a_k + b_k)$ e $f_{min} = f(\xi_{min})$
   (d) se $|b_k - a_k| \leq 0.5\ x_{tol}\ (|b_k| + |a_k|)$, ritornare ξ_{min}, f_{min}
   (e) se $f(\alpha_k) \simeq f(\alpha_{k-1})$ e $f(\beta_k) \simeq f(\beta_{k-1})$ (precisione di macchina), ritornare ξ_{min}, f_{min}
3. superato numero massimo di iterazioni, ritornare ξ_{min}, f_{min}

Esercizio proposto Sviluppare una routine per trovare il minimo della funzione monomodale $f(x) = x^2 - \sin(x)$ in $[0, 1]$ utilizzando il metodo iterativo basato sulla regola di scelta aurea. La routine restituisce l'ascissa e l'ordinata del minimo e, inoltre, un valore intero che indichi quale condizione di stop si è verificata. Alla routine vengono forniti l'intervallo $[a, b]$, la precisione relativa x_{tol} (10^{-3} o 10^{-6}) e la funzione $f(x)$.

Confrontare i risultati del metodo precedente con quelli ottenuti con il metodo classico.

Si devono scrivere le routine per implementare $f(x)$, $f'(x)$ e $f''(x)$ (in modo analitico).

5.3 Metodo dell'interpolazione parabolica (basato su derivata prima)

I passi dell'**algoritmo** possono essere:

1. inizializzare le variabili: se $f'(\xi_0) < 0$ allora si scelga h positivo (altrimenti negativo) e in modo che $\xi_1 = \xi_0 + h$ e $\xi_2 = \xi_0 + 2h$ stiano all'interno di (a, b).

2. ciclo: numero massimo di iterazioni

   - *Localizzazione del minimo*

   (a) ciclo: numero massimo di iterazioni
      i. se $f(\xi_0) > f(\xi_1)$ e $f(\xi_1) < f(\xi_2)$, break
      ii. se $f(\xi_0) > f(\xi_1)$ e $f(\xi_1) > f(\xi_2)$, $h = 2h$
      iii. se $f(\xi_0) \leq f(\xi_1)$, $h = h/2$
      iv. ricalcolare ξ_1, ξ_2, $f(\xi_1)$ e $f(\xi_2)$

   - *Approssimazione parabolica*

   (b) verificare che $D = (4y_1 - 2y_0 - 2y_2) \neq 0$, dove $y_0 = f(\xi_0)$, $y_1 = f(\xi_1)$ e $y_2 = f(\xi_2)$
   (c) $h_{min} = h(4y_1 - 3y_0 - y_2)/D$: $\xi_{min} = \xi_0 + h_{min}$, $f_{min} = f(\xi_{min})$ e $\xi_0 = \xi_{min}$
   (d) se $|\xi_2 - \xi_0| \leq 0.5\, x_{tol}\, (|\xi_0| + |\xi_2|)$, ritornare ξ_{min}, f_{min}
   (e) se $y_0 \simeq y_1$ e $y_1 \simeq y_2$ (precisione di macchina), ritornare ξ_{min}, f_{min}
   (f) se $|h_{min}| < |h|$ allora $h = |h_{min}|$, altrimenti $h = |h|/2$
   (g) scelta del segno di h in funzione del segno di $f'(\xi_0)$

3. superato numero massimo di iterazioni, ritornare ξ_{min}, f_{min}

Esercizio proposto Sviluppare una routine per trovare il minimo della funzione monomodale $f(x) = 8\cos^2 x + x^2 - 2x + 9$ in $[0, 3]$ utilizzando il metodo dell'interpolazione parabolica e considerando il punto iniziale $\xi_0 = 2.5$. La routine restituisce l'ascissa e l'ordinata del minimo e, inoltre, un valore intero che indichi quale condizione di stop si è verificata. Alla routine vengono forniti l'intervallo $[a, b]$, la precisione relativa x_{tol} (10^{-3} o 10^{-6}) e le funzioni $f(x)$ e $f'(x)$.

Si devono scrivere le routine per implementare $f(x)$ e $f'(x)$ (in modo analitico).

5.4 Alcune funzioni e output di esempio

Utilizzare le seguenti funzioni per testare gli esercizi proposti.

$$f3(x) = (x - 0.1)^4 - 10 \qquad \text{con intervallo [-1,2] e } \xi = 0.1$$

$$f4(x) = \frac{1}{(x-0.3)^2 + 0.01} + \frac{1}{(x-0.9)^2 + 0.04} - 6 \qquad \text{con intervallo [0.35,0.85] e } \xi = 0.637006$$

Alcuni output di esempio del primo esercizio con precisione $x_{tol} = 10^{-6}$:

IT	a_k	α_k	β_k	b_k	$f(\alpha_k)$	$f(\beta_k)$
00	0.000000	0.381966	0.618034	1.000000	-0.226847	-0.197468
01	0.000000	0.236068	0.381966	0.618034	-0.178153	-0.226847
02	0.236068	0.381966	0.472136	0.618034	-0.226847	-0.231877
03	0.381966	0.472136	0.527864	0.618034	-0.231877	-0.225049
04	0.381966	0.437694	0.472136	0.527864	-0.232276	-0.231877
05	0.381966	0.416408	0.437694	0.472136	-0.231082	-0.232276
06	0.416408	0.437694	0.450850	0.472136	-0.232276	-0.232465
07	0.437694	0.450850	0.458980	0.472136	-0.232465	-0.232371
08	0.437694	0.445825	0.450850	0.458980	-0.232442	-0.232465
09	0.445825	0.450850	0.453955	0.458980	-0.232465	-0.232448
10	0.445825	0.448930	0.450850	0.453955	-0.232464	-0.232465
11	0.448930	0.450850	0.452036	0.453955	-0.232465	-0.232461
12	0.448930	0.450117	0.450850	0.452036	-0.232466	-0.232465
13	0.448930	0.449663	0.450117	0.450850	-0.232465	-0.232466
14	0.449663	0.450117	0.450397	0.450850	-0.232466	-0.232466
15	0.449663	0.449943	0.450117	0.450397	-0.232466	-0.232466
16	0.449943	0.450117	0.450224	0.450397	-0.232466	-0.232466
17	0.450117	0.450224	0.450290	0.450397	-0.232466	-0.232466
18	0.450117	0.450183	0.450224	0.450290	-0.232466	-0.232466

```
Minimo (sezione aurea):  x=0.450170, f=-0.232466
*****Raggiunta precisione su f

IT zero
01 0.406554
02 0.454444
03 0.450149
04 0.450184
05 0.450184

Minimo con f' (secanti) e f'':  x=0.450184, f=-0.232466
```

Alcuni output di esempio del secondo esercizio con precisione $x_{tol} = 10^{-6}$:

IT	ξ_0	ξ_1	ξ_2	h	ξ_{min}	f_{min}
PAR--00	2.500000	1.250000	0.000000	-1.250000	0.000000	0.000000
PAR--01	1.318826	2.500000	3.681174	1.181174	1.318826	8.598905
LOC--00	1.318826	1.909413	2.500000	0.590587		
LOC--01	1.318826	1.614120	1.909413	0.295294		
PAR--02	1.506524	1.694221	1.881919	0.187698	1.506524	8.289569
LOC--00	1.506524	1.600372	1.694221	0.093849		
LOC--01	1.506524	1.553448	1.600372	0.046924		
LOC--02	1.506524	1.529986	1.553448	0.023462		
LOC--03	1.506524	1.518255	1.529986	0.011731		
LOC--04	1.506524	1.512389	1.518255	0.005866		
LOC--05	1.506524	1.509456	1.512389	0.002933		
LOC--06	1.506524	1.507990	1.509456	0.001466		
LOC--07	1.506524	1.507257	1.507990	0.000733		
PAR--03	1.507223	1.506524	1.505824	-0.000700	1.507223	8.289564
LOC--00	1.507223	1.506874	1.506524	-0.000350		
LOC--01	1.507223	1.507048	1.506874	-0.000175		
LOC--02	1.507223	1.507136	1.507048	-0.000087		
LOC--03	1.507223	1.507180	1.507136	-0.000044		
LOC--04	1.507223	1.507202	1.507180	-0.000022		
LOC--05	1.507223	1.507213	1.507202	-0.000011		
LOC--06	1.507223	1.507218	1.507213	-0.000005		
LOC--07	1.507223	1.507221	1.507218	-0.000003		
LOC--08	1.507223	1.507222	1.507221	-0.000001		
LOC--09	1.507223	1.507223	1.507222	-0.000001		

```
Minimo (interpolazione parabolica):  x=1.507223, f=8.289564
```