

Dipartimento di Ingegneria Biofisica ed Elettronica

Università degli Studi di Genova

PSPC-Research Group

Insegnamento di

MISURE ELETTRONICHE, SENSORI e TRASDUTTORI 1

Appunti alle lezioni

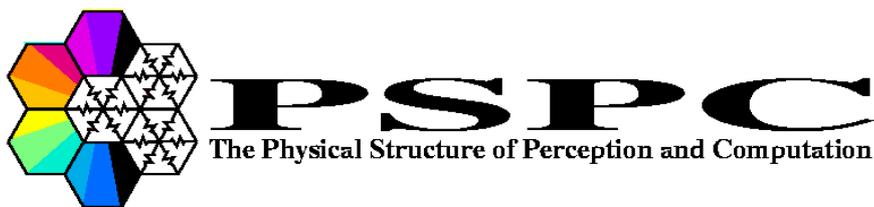
(©PSPC-Lab 2000, i diritti d'autore sono riservati)

Docente: Prof. Giacomo Mario Bisio

Data: 23-01-2002

Versione: 1.0

Note: Le sezioni individuate da * sono da considerarsi non necessarie alla preparazione dell'esame di DU, quelle con ** alla preparazione dell'esame (laurea e DU)



Indice

I	Strumenti per la misura di grandezze elettriche	9
1	Strumenti elettromeccanici	11
1.1	Lo strumento a bobina mobile (PMMC)	11
1.1.1	Utilizzo dello strumento a bobina mobile come amperometro	14
1.1.2	Voltmetro DC a bobina mobile	18
1.2	Multimetro analogico	22
1.2.1	Schema serie	23
1.2.2	Schema parallelo **	25
1.3	Misure potenziometriche	26
1.3.1	Potenziometro di Kelvin	27
1.4	Elettrometri	28
1.4.1	Elettrometro a bilancia	28
1.4.2	Elettrometro a quadranti	30
1.5	Strumenti elettrodinamici	31
1.5.1	Generalità	31
1.5.2	Amperometro e voltmetro in corrente alternata	34
1.5.3	Wattmetro	35
1.6	Strumenti AC basati su PMMC	38

1.6.1	Voltmetro AC	38
1.6.2	Amperometro AC	40
2	Strumenti elettronici	45
2.1	Voltmetri digitali	45
2.1.1	Conversione a singola rampa	45
2.1.2	Conversione a doppia rampa	46
2.1.3	Conversione tensione-frequenza	47
2.1.4	Conversione A/D con rampa a gradini	48
2.1.5	Conversione A/D per successive approssimazioni	48
2.2	Tensioni AC : misura della tensione di picco	49
2.3	Tensioni AC : misura di rms	50
3	Oscilloscopi	51
3.1	CRT	51
4	Metodi di confronto per la misura R,L,C	55
4.1	Misura di resistenze : ponte di Wheatstone	55
4.2	Misura a ponte di piccole resistenze *	56
4.3	Misure di resistenze di grande valore	58
4.4	Misure di capacit�	59
4.5	Ponti per induttanze	61
4.6	Ponti di Maxwell-Wien e di Hay	63
4.7	Schema a confronto di induttori	64
4.8	Rappresentazione dell'incognita nei ponti serie e parallelo	65
4.8.1	Circuiti ponte serie	65

<i>INDICE</i>	5
4.8.2 Circuiti ponte parallelo	65
4.9 Posizione degli elementi variabili	65
4.10 Sorgenti di errore	66
4.11 Misura di L e C con tecniche elettroniche	67
4.12 Misure di L in alta frequenza	68
4.12.1 Circuiti a risonanza	68
4.13 Metodi di ponte- <i>Complementi</i> **	68
4.13.1 Principio e schema fondamentale. Modi di impiego con correnti continue	68
4.13.2 Tecniche e accorgimenti di misura	70
4.13.3 Intercambiabilità dei lati opposti e delle diagonali	72
4.13.4 Teoria generale del ponte	73
4.13.5 Sensibilità del metodo a ponte	77
4.13.6 Ponti a deviazione	80
4.13.7 Doppio ponte di Thomson (Lord Kelvin)	80
4.13.8 Metodi di ponte a corrente alternata	84
4.13.9 Esempi di ponti a corrente alternata	85
4.13.10 Ponti a corrente alternata con piú di quattro lati	93
4.13.11 Ponti automatici a corrente alternata	95
4.13.12 Le schermature nei ponti in corrente alternata	95
4.14 Ponti a lati di rapporto induttivi (Ponti a trasformatore)	100
4.14.1 Impiego di piú condensatori campione sul ramo di riferimento	101
4.14.2 Impiego di un divisore potenziometrico tipo Thompson-Varley	102

II	Sensori e Trasduttori	105
5	Sensori e Trasduttori	107
5.1	Sensori di temperatura a termocoppia	107
5.1.1	Termocoppia	107
5.1.2	5 Leggi di impiego della termocoppia	108
5.1.3	Esempio di impiego di una termocoppia	109
5.2	Termocoppie- <i>Complementi</i>	111
5.2.1	Generalità.	111
5.2.2	Caratteristiche di una termocoppia.	111
5.2.3	Legge delle temperature successive.	112
5.2.4	Legge dei metalli interposti.	113
5.2.5	Circuiti e metodi di misura.	115
5.2.6	Serie termoelettrica.	118
5.2.7	Termocoppie di uso più frequente.	119
5.2.8	Protezione delle termocoppie.	120
5.3	Sensori di temperatura a resistenza elettrica	122
5.3.1	Generalità.	122
5.3.2	Materiali e caratteristiche dei termometri a resistenza.	122
5.3.3	Conformazione dei termometri a resistenza.	124
5.3.4	Termistori.	124
5.3.5	Protezione dei termometri a resistenza.	125
5.3.6	Circuiti di misura e precisioni raggiungibili.	125
5.3.7	Schema di utilizzo di un sensore resistivo	126
5.4	Circuiti di compensazione e misura per sensori a termistorei *	127

5.5	Circuiti di compensazione e misura per sensori resistivi al platino *	128
5.6	Transistori come sensori di temperatura *	129
5.7	Sensori di pressione	131
5.8	Misure di deformazione	131
5.8.1	Generalità.	131
5.8.2	Estensimetri a resistenza elettrica.	132
5.8.3	Altri tipi di estensimetri. *	143
5.8.4	Taratura degli estensimetri.	144
5.8.5	Osservazioni.	145
5.9	Piezolettricità	145
5.10	Dispositivi piezoelettrici	146
5.11	Accelerometri	150
5.12	Elementi capacitivi sensibili allo spostamento	151
5.13	Dispositivi di tipo induttivo per la misura dello spostamento	153
5.14	Trasformatore differenziale per la misura di spostamenti lineari (LVDT)	156
5.15	Sonde di corrente ad effetto Hall	156
5.16	Sensori di umidità **	157
III	Struttura generale di un sistema di misura	161
6	Struttura generale di un sistema di misura	163
6.1	Caratteristiche statiche di un sistema di misura	163
6.2	Tipi di misurazioni	164
6.3	Misure ed errori	166
6.3.1	Sorgenti di errore	167

6.4	Propagazione degli errori	168
APPENDICI		170
A	Sistema Internazionale	173
A.1	Sistema Internazionale	173
A.2	Prefissi dei multipli e sottomultipli delle unità di misura	174
A.3	Norme di scrittura del SI	175
A.4	Grandezze derivate del SI e loro unità di misura	176

Parte I

Strumenti per la misura di grandezze elettriche

Capitolo 1

Strumenti elettromeccanici

Studieremo la struttura di Amperometri, Voltmetri, Ohmetri. Gli strumenti elettromeccanici si suddividono in svariate tipologie, qui consideriamo le tre principali:

- *Magneto elettrici (azione campo corrente; PMMC : Permanent Magnet Mobile Coil)*
- *Elettrometri*
- *Elettrodinamici*

1.1 Lo strumento a bobina mobile (PMMC)

Consideriamo la figura:

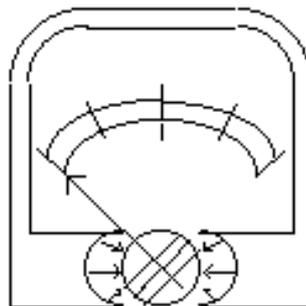


Figura 1.1: Amperometro a bobina mobile

Le espansioni polari (pole shoes) sono tali da generare un campo magnetico a simmetria radiale (nella regione di traferro le linee di forza hanno una direzione radiale rispetto al centro del cilindro). Il cilindro è in ferro dolce ad alta permeabilità magnetica. La componente radiale del campo è uniforme tra le espansioni polari ed il nucleo; sul cilindro è avvolta una spira (coil). Quando la bobina è percorsa da corrente ruota (su un perno fisso), e l'indice quantifica tale rotazione. La rotazione è contrastata

da una molla a spirale (molla=spring). La coppia è dunque bilanciata dalla forza di deformazione della molla.

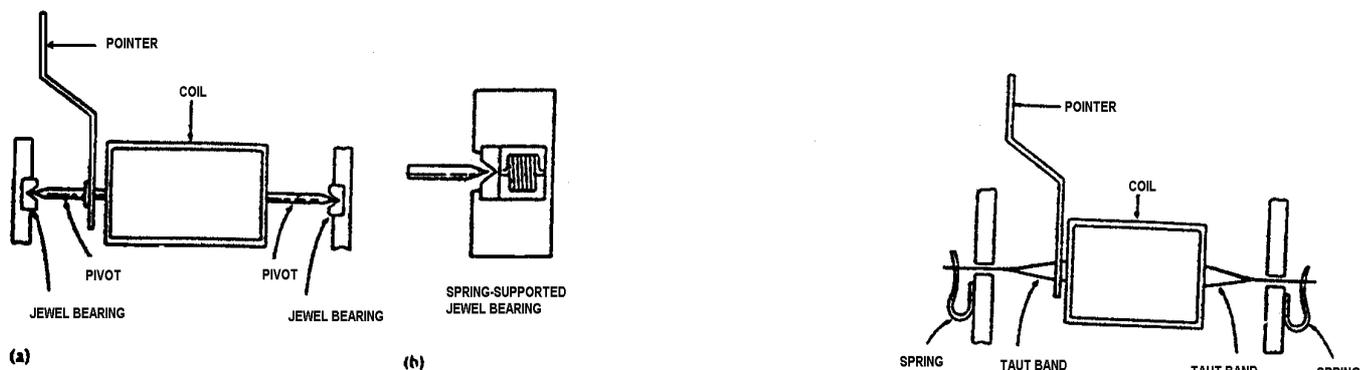


Figura 1.2:

L'asse del cilindro poggia su due cuscinetti a basso attrito (fig. 1.2 5-5a). Per ridurre ulteriormente gli attriti tra perno e struttura portante è possibile sostituire i cuscinetti con sostegni realizzati con pietre dure: tale soluzione però implica una elevatissima delicatezza dello strumento. Un'alternativa è quella di appoggiare il perno del cilindro direttamente su una molla (maggiore robustezza agli urti (fig. 1.2 5-5b). Altra soluzione è quella di impiegare un nastro teso (taut band): esso sorregge il cilindro e funziona anche da molla di richiamo (fig. 1.2 5-6). Il puntatore è dotato di un contrappeso che porta il centro di massa sull'asse del cilindro. Lo zero control consiste di una vite accessibile dall'esterno per variare la posizione della molla : si controlla lo zero dello strumento facendo in modo che, quando la corrente che lo attraversa è nulla, l'indice indichi lo zero della scala graduata. La validità della misura è legata allo strumento in sè ma anche al suo impiego nelle giuste condizioni. La lettura della corrente, ad esempio, è effettuata su una scala graduata che talvolta presenta una superficie riflettente tale da indicare all'utilizzatore la posizione corretta di lettura (per evitare errori di parallasse).

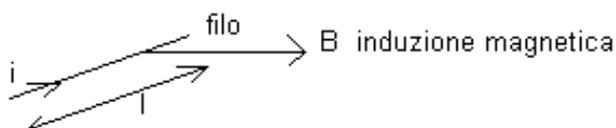


Figura 1.3: Schema vettoriale

Su una metà di un solo avvolgimento della bobina ho una forza:

$$\mathbf{F} = I\hat{\mathbf{I}} \wedge \mathbf{B}$$

($\hat{\mathbf{I}}$ è il versore della corrente)

$$\text{Coppia di deflessione } C_d = [2(BIl)r]N = NBIdl \quad (N=\# \text{ spire della bobina}, d=2r)$$

B è espresso in Tesla, I in Ampère, l e d in metri.

$$[C_d] = [\text{Newton} \cdot \text{metri}]$$

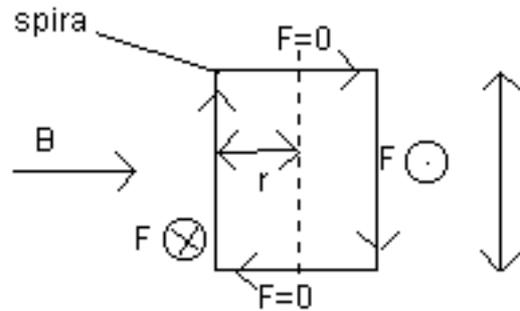


Figura 1.4: Spira

La bobina si muove in una regione dove l'induzione magnetica è uniforme, perciò la coppia di deflessione non dipende dalla particolare posizione della spira (e quindi della bobina), dipende solo dalla corrente.

La coppia di controllo $C_C = k\theta$ è proporzionale all'angolo di rotazione θ , mentre k è una costante caratteristica della molla. Abbiamo equilibrio quando $C_D = C_C$ cioè quando $I = \frac{k}{NBld}\theta$

Esempio

Valori tipici :

- $N = 100$ spire
- $B = 0.2T$ (Tesla)
- $d = 10^{-2}m$
- $l = 1.5 \cdot 10^{-2}m$
- $I = 10^{-3}A$
- $C_d = 3 \cdot 10^{-6}Nm$

Ciò che si osserva nella misura non è l'angolo θ ma la posizione dell'indice, calettato alla bobina, rispetto ad una scala graduata. Su tale scala avremo che:

$$\lambda = L\theta$$

dove λ è la deviazione lineare dell'indice, osservata su una scala graduata, mentre L è la lunghezza dell'indice. Otteniamo quindi:

$$I = \frac{k}{NBldL}\lambda = K_a\lambda$$

K_a è detta costante amperometrica dello strumento.

Valori tipici (*Galvanometro*= amperometro a bobina mobile particolarmente sensibile):

$$(\text{sensibilità})^{-1} = \begin{cases} 0.1 \div 1 & \mu A/mm \text{ Galvanometri ad indice meccanico} \\ 0.01 \div 0.1 & \mu A/mm \text{ Galvanometri ad indice ottico} \end{cases}$$

(Nei galvanometri ad indice ottico l'indicazione della corrente è data da un punto luminoso che colpisce uno specchio posto sullo strumento e che va a riflettersi su uno schermo opaco posto anche a diversi metri di distanza dall'apparecchio; siccome questa soluzione è decisamente scomoda e ingombrante, l'elevata distanza della scala graduata può essere ottenuta deviando più volte il raggio luminoso con numerosi specchi, facendogli percorrere ugualmente un lungo tragitto: lo strumento che così si ottiene è però molto delicato visto che bisogna mantenere il perfetto allineamento tra gli specchi). Si definisce *sensibilità amperometrica* la grandezza:

$$\sigma_a = \frac{\text{variazione grandezza misurata}}{\text{variazione grandezza da misurare}}$$

$$\left[\text{Sensibilità} = \frac{\Delta \text{segnale in uscita}}{\Delta \text{segnale in ingresso}} = \frac{\text{Variazione indice}}{\text{Corrente}} \right]$$

Nel nostro caso: $\sigma_a = \frac{d\lambda}{dI} = \frac{1}{K_a}$ Più K_a è piccola e più lo strumento è sensibile. Deve dunque essere piccola la quantità $\frac{k}{NBId}$, ovvero dobbiamo disporre di un elevato numero di spire; tali spire dovranno essere più grandi possibile mentre la costante della molla di richiamo dovrà essere piccola.

Il galvanometro è usato soprattutto per misurare condizioni di equilibrio, misure a corrente nulla (rivelatore di situazioni di bilanciamento); in tali casi si parla di strumento di zero - null detector.

Misura di correnti AC

Lo strumento a bobina mobile (PMMC) ha una notevole inerzia, ha frequenza di taglio di pochi hertz, risponde in definitiva al valor medio della corrente o tensione misurata (a 50Hz questo è già perfettamente evidente). Per la misura di grandezze AC bisogna introdurre dei circuiti di raddrizzamento (cfr. ...) o disporre di uno strumento che risponda al quadrato della grandezza sinusoidale.

1.1.1 Utilizzo dello strumento a bobina mobile come amperometro

Dato uno strumento, la corrente di fondoscala (corrente corrispondente alla deviazione massima osservabile dell'indice, purchè l'indicazione resti corretta) è fissata. Tipicamente tale valore è qualche frazione di mA. Nasce un problema di delicatezza nella fase di misura per non danneggiare lo strumento con correnti eccessive. Per voler misurare correnti intense, oltre il valore nominale dell'amperometro, si dispone in parallelo allo strumento una resistenza di derivazione o shunt (vedere fig. 1.5).

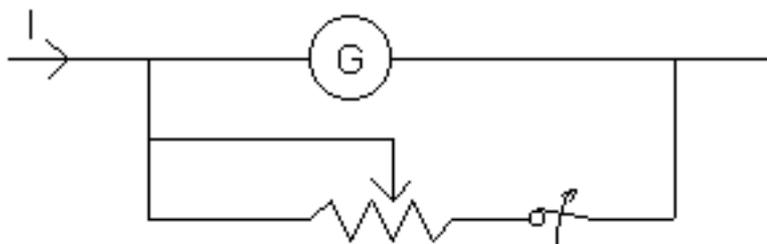


Figura 1.5: Inserimento della resistenza di shunt

Inizialmente l'interruttore è chiuso e la corrente passa attraverso il piccolo resistore di shunt; l'indice

della resistenza variabile viene spostato aumentando la corrente su G; raggiunto il valore opportuno l'interruttore è aperto perchè la corrente passi tutta nello strumento di misura. Così facendo l'apparecchio è riparato da correnti eccessive che potrebbero danneggiarlo. Tipicamente si fa uso di resistenze di shunt per misure di correnti di valore superiore per ordine di grandezza alla corrente di fondo scala dello strumento. La resistenza di shunt ha di solito 4 terminali, come mostrato in fig. 1.6, per facilitare l'inserimento dello strumento (amperometro/galvanometro) in parallelo.

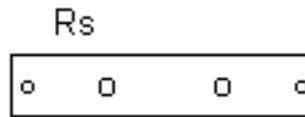


Figura 1.6: Resistenza di shunt a 4 terminali

Con riferimento alla fig. 1.6, si può dire che i due terminali esterni consentono l'inserimento nel circuito di misura, quelli interni l'inserimento dello strumento di misura. La connessione che si va a realizzare con lo strumento è mostrata nella seguente figura:

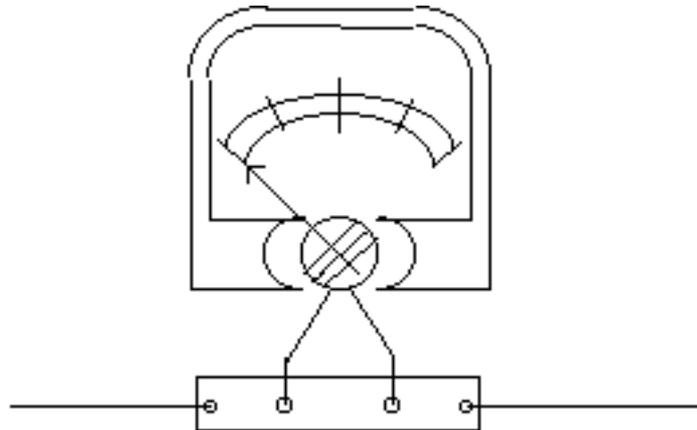


Figura 1.7: Collegamento della resistenza di shunt con l'amperometro

Tale configurazione della resistenza di shunt consente di avere in parallelo allo strumento una resistenza di valore ben definito e a pari a R_s , visto che le resistenze di contatto r rimangono escluse da questo parallelo, così come evidenziato nella seguente figura:

Interessa esprimere la relazione tra la corrente che scorre in R_s e quella che passa nell'amperometro. R_m è la resistenza degli elementi conduttori all'interno dello strumento di misura (spira, molla, ...)

La relazione fra le due correnti sarà data da

$$I = I_m + I_s = I_m \left(1 + \frac{I_s}{I_m} \right)$$

I_m e I_s sono in parallelo \implies stessa tensione \implies proporzione inversa rispetto ai valori delle resistenze. Da questa considerazione ottengo che

$$I = I_m \left(1 + \frac{R_m}{R_s} \right)$$

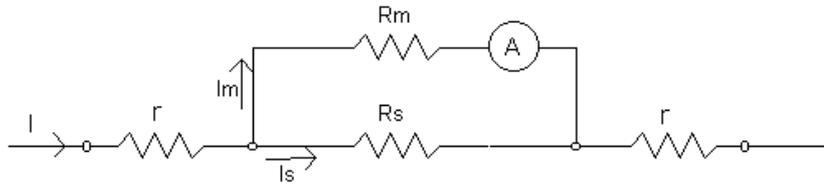


Figura 1.8: Schema elettrico relativo alla figura 1.7



Figura 1.9: È un puro indicatore (un corto circuito, dal punto di vista elettrico)

Misurando la I_m e conoscendo il rapporto delle resistenze determino la I . La massima corrente misurabile dallo strumento (dotato di resistenza di shunt) è:

$$I_{max} = I_{fs} \left(1 + \frac{R_m}{R_s} \right) \quad \text{con } I_{fs} = \text{corrente di fondoscala}$$

Quindi dato il campo di correnti delle quali io voglio una misura e data I_{fs} , determino il valore della R_s

Riassumendo :

- Dato lo strumento ho I_{fs} e R_m
- Dato il campo di correnti da misurare si conosce I_{max}

Pertanto:

$$R_s = \frac{R_m}{\frac{I_{max}}{I_{fs}} - 1}$$

Esempio Dati:

- $I_{fs} = 100\mu A$
- $R_m = 1K\Omega$

Se $I_{max} = 100mA \implies R_s = 1.001 \Omega$. Se $I_{max} = 1A \implies R_s = 0.10001 \Omega$ Se $I_{max} = I_{fs}$ la resistenza R_s richiesta è infinita, ovvero non mettiamo lo shunt.

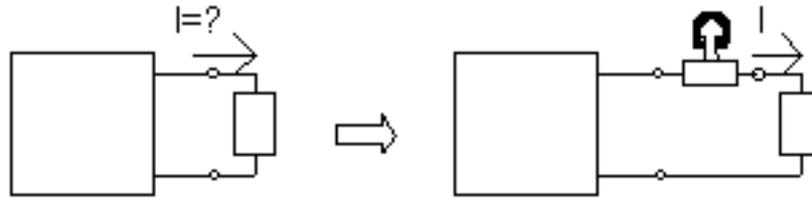


Figura 1.10: Esempio

Osservazione 1): se la R_m risulta particolarmente sensibile alla temperatura, influenzando dunque la misura attraverso il rapporto R_m/R_s , si provvede a disporre in serie allo strumento una resistenza (detta di swamping) maggiore di R_m , realizzata con materiali con elevata sensibilità alla temperatura (leghe : manganina - Cu,Mn,Ni; costantana - Cu,Ni): tale resistenza bilancia le variazioni di R_m con la temperatura.

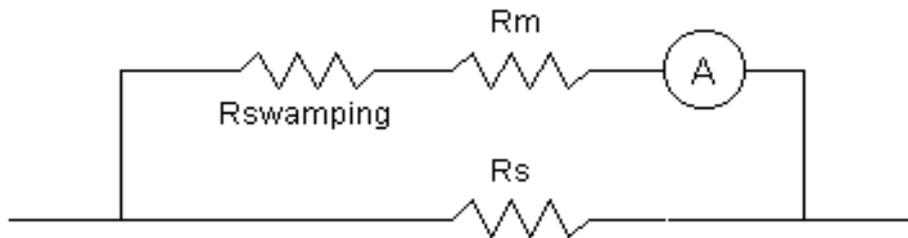


Figura 1.11: Esempio

Osservazione 2): se si deve cambiare la resistenza di shunt per avere uno strumento con portate (correnti massime misurabili) differenti si può impiegare una resistenza variabile (vedere figura 1.12). Nel modificare il valore di resistenza, è necessario che la spazzola effettui il contatto con la resistenza di shunt successiva prima di interrompere il contatto con la precedente; altrimenti si avrebbe un picco di corrente sullo strumento, ovvero avremmo per un istante tutte le resistenze di shunt disinserite e quindi tutta la corrente attraverserebbe l'amperometro (A,B,C contattano shunt diversi) danneggiandolo. Per venire incontro a questa necessità la spazzola della resistenza variabile viene realizzata come indicato in fig. 1.12.

Inserendo la resistenza di shunt, lo strumento perde parte della sua sensibilità, infatti: $I_m = K_a \lambda$
 $I = K_a \left(1 + \frac{R_m}{R_s}\right) \lambda$

$$\sigma_a = \frac{d\lambda}{dI} = \frac{1}{K_a \left(1 + \frac{R_m}{R_s}\right)}$$

Comunque tale perdita di sensibilità non importa più di tanto, perchè lo shunt si impiega per misurare correnti elevate, e in tali misure può aumentare l'errore assoluto ma rimanere invariato quello relativo.

Lo strumento che abbiamo analizzato, l'amperometro a bobina mobile, è per natura polarizzato : abbiamo fissato a sinistra l'indice di zero, quindi può indicare la corrente solo in un certo verso.

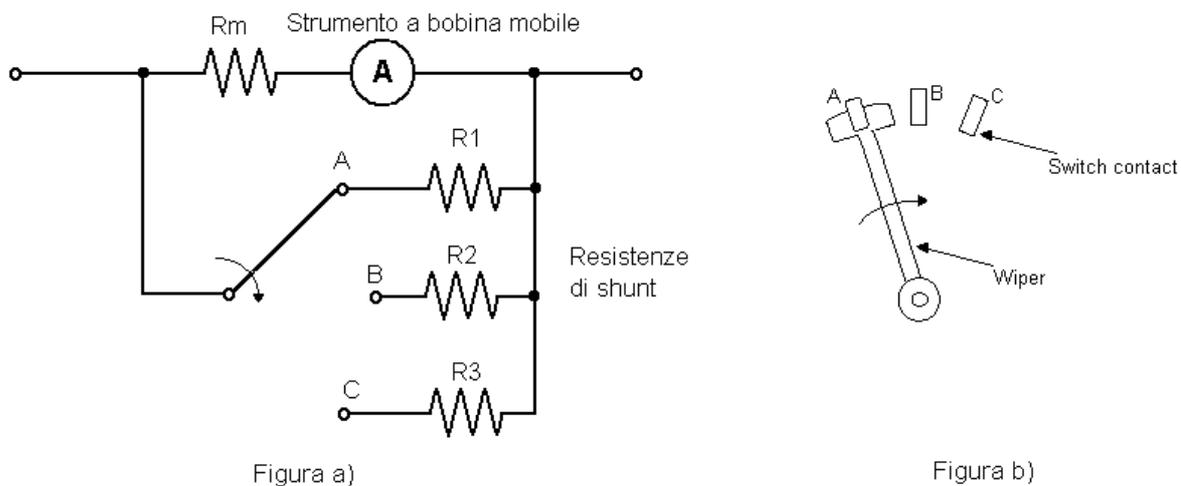


Figura 1.12: Amperometro multirange con resistenze di shunt selezionabili

1.1.2 Voltmetro DC a bobina mobile

Lo strumento a bobina mobile ora visto può essere anche impiegato come voltmetro se gli viene inserita in serie una opportuna resistenza R_s detta resistenza moltiplicatrice.

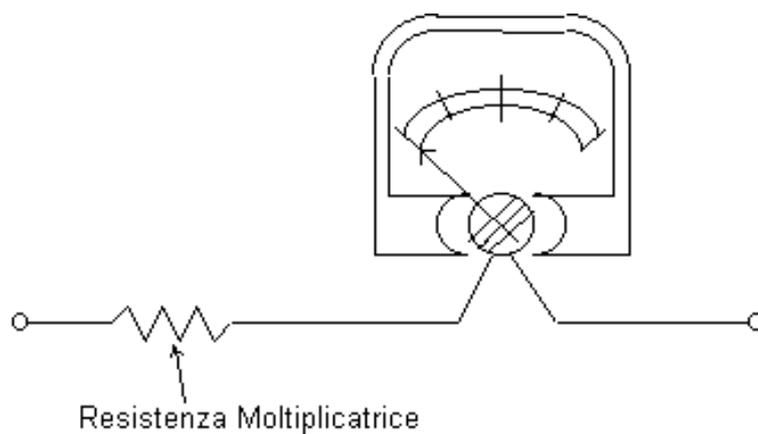


Figura 1.13: Voltmetro DC a bobina mobile

In termini elettrici abbiamo la seguente rappresentazione:

Dato lo strumento conosciamo il fondoscala ed R_m : in funzione della tensione massima che vogliamo

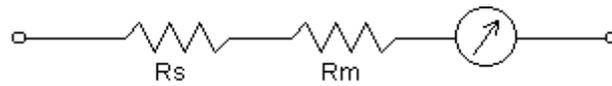


Figura 1.14: Rappresentazione in termini elettrici della figura 1.13

misurare scegliamo R_s :

$$V_{max} = (R_s + R_m)I_{fs} \quad R_s = \frac{V_{max}}{I_{fs}} - R_m$$

Cambiando R_s si cambia la portata del voltmetro, ovvero V_{max} . Questo strumento è caratterizzato da un parametro detto Sensibilità Voltmetrica : è il rapporto tra la resistenza che lo strumento offre e la tensione massima misurabile. Questa quantità risulta essere uguale all'inverso della corrente di fondoscala.

$$\frac{1}{I_{fs}} = \frac{\text{resistenza totale dello strumento}}{\text{tensione massima misurabile}} := S$$

Si deduce che definendo S definisco di conseguenza la sensibilità dello strumento PMMC stesso: ad alte I_{fs} corrisponde uno strumento poco sensibile e viceversa.

Esempio (*valori tipici*)

$$S = \frac{500 \text{ K}\Omega}{50 \text{ V}} \text{ [A}^{-1}\text{]}$$

Per avere un voltmetro a più scale sarà sufficiente variare il valore della resistenza serie R_s ; ciò si può ottenere con schemi del tipo:

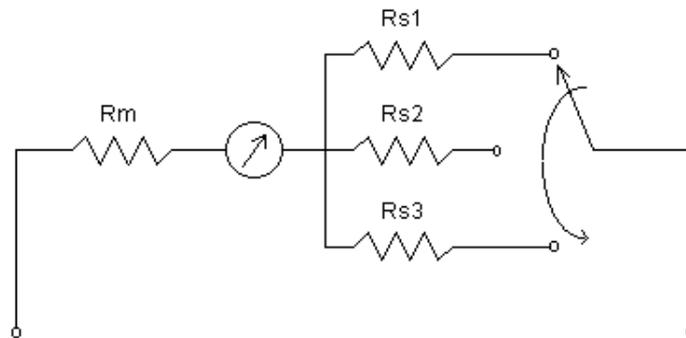
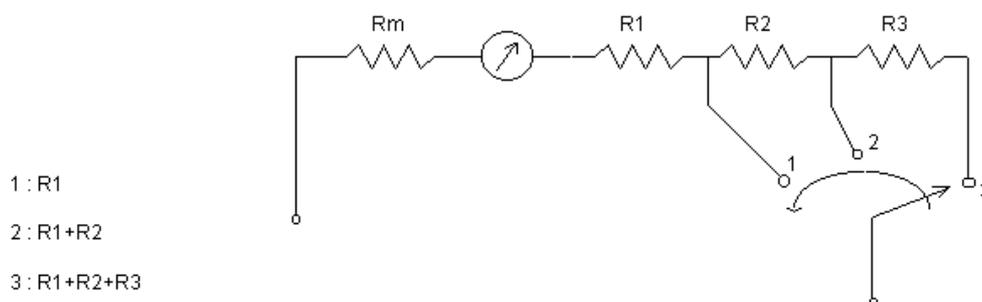


Figura 1.15:

Figura 1.16: Esempio di variazione della resistenza R_s

Studiamo l'influenza dello strumento sulla tensione da misurare, gli effetti, cioè, dell'inserzione del voltmetro nel circuito in cui voglio rilevare la tensione. Dalla definizione di sensibilità :

$$R_s = SV_{max} - R_m$$

Mi interessa la tensione sui nodi A,B:

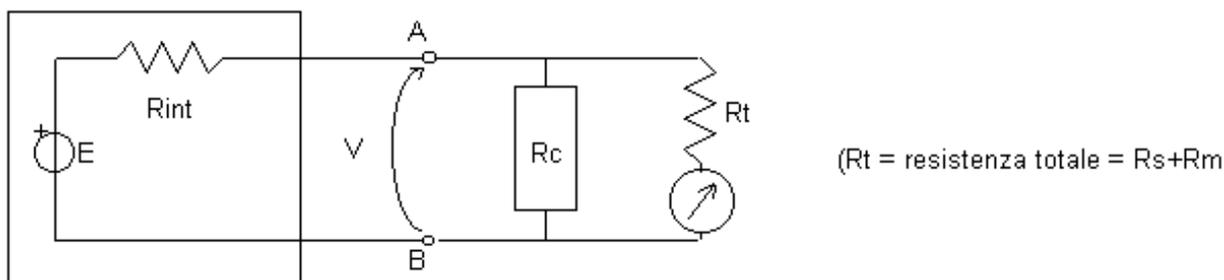


Figura 1.17:

Assumiamo di lavorare con un circuito lineare; effettuiamone la sintesi di Thévenin. In condizione di circuito aperto (R_c infinita) abbiamo:

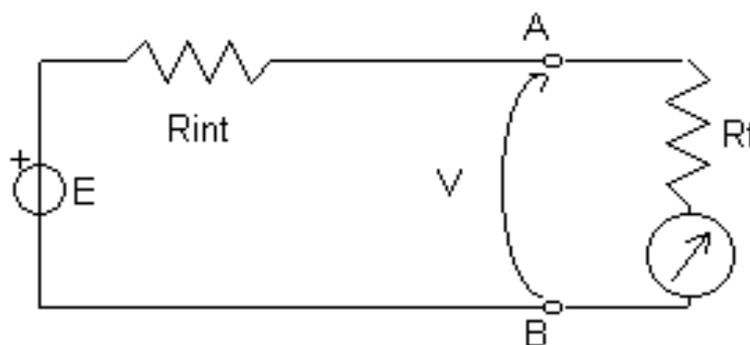


Figura 1.18:

$$V = \frac{E}{\underbrace{R_{int} + R_t}} R_t \neq E$$

Corrente che attraversa lo strumento

dove E è la tensione sul carico prima dell'inserzione del voltmetro; V è la tensione che viene misurata dallo strumento:

Valutiamo l'errore relativo dovuto all'inserzione del voltmetro:

$$e_r = \frac{E - V}{E} = \frac{E - E \frac{R_t}{R_{int} + R_t}}{E} = \frac{R_{int}}{R_{int} + R_t} = \frac{\frac{R_{int}}{R_t}}{1 + \frac{R_{int}}{R_t}}$$

L'andamento dell'errore relativo in questa situazione è:

Nel caso in cui R_c non sia infinita, l'errore relativo viene ricavato rapportando la resistenza del voltmetro con la resistenza del circuito in cui inserisco lo strumento per effettuare la misura. Abbiamo:

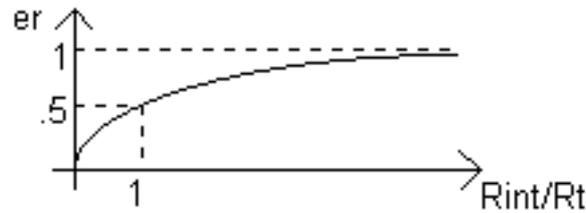


Figura 1.19: Grafico

L'andamento dell'errore relativo è il seguente:

$$e_r = \frac{\frac{R'_{int}}{R_c}}{1 + \frac{R'_{int}}{R_c}}$$

L'andamento dell'errore è del tipo $\frac{x}{1+x}$.

Esempio

Dati :

- $R_c = \infty$
- $R_t = 100 \text{ K}\Omega$
- $R_{int} = 10 \text{ K}\Omega$

Si ottiene :

$$e_r = \frac{0.1}{1 + 0.1} = 10\%$$

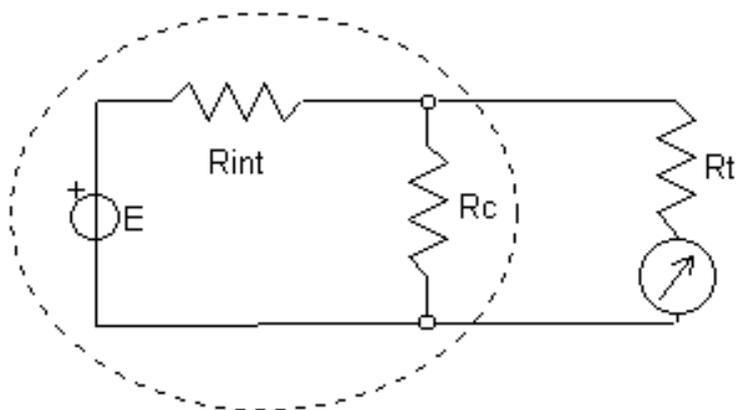
$$R_c = 10 \text{ K}\Omega \implies R_c \parallel R_{int} = 5 \text{ K}\Omega$$

$$e_r = R_c \parallel R_{int} R_t = 0.05 = 5\%$$

Osservazione: $R_m + R_s = SV_{max} \rightarrow$ noto/fissato che sia il circuito in cui inserire lo strumento, ovvero la sua resistenza interna, resta di conseguenza determinato l'errore relativo. Per diminuire quest'ultimo non è lecito porre una ulteriore \bar{R} in serie allo strumento, perchè così facendo non miglioro affatto le cose, infatti lo strumento non arriva più a misurare a fondoscala. Perciò, in conclusione la resistenza moltiplicatrice da impiegare è univocamente determinata dalla relazione $R_m + R_s = SV_{max}$. Da notare che abbiamo bisogno di e_r piccolissimi; in questa situazione la relazione $e_r = \frac{x}{1+x}$ può essere approssimata con $e_r \simeq x$; ciò $\rightarrow R_m + R_s \gg R_{carico}, R_{circuito}$.

La perturbazione relativa che ho con R_c infinita è minore di quella che ho per R_c finita, in quanto nel primo caso non ho corrente -senza voltmetro - ed ho corrente -collegando lo strumento; nel secondo caso ho già una corrente diversa da zero che circola con il voltmetro non collegato, quindi la sua influenza relativa è minore. Se R_c è finito ho errore relativo tanto più piccolo quanto più R_c è piccolo.

Note



...e includendo R_c nel circuito equivalente...

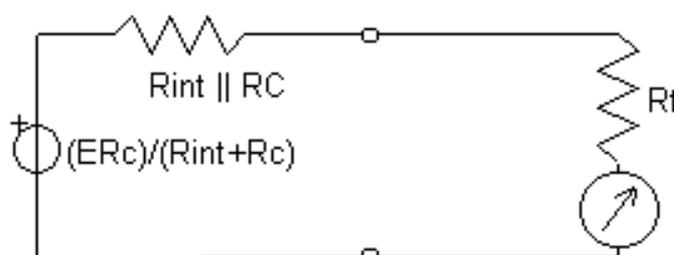


Figura 1.20:

Talvolta si impiega una definizione diversa di errore relativo:

$$e_r = \frac{E - V}{V} \quad (E \text{ nominale}, V \text{ misurato})$$

Se $e_r \ll 1$ non c'è differenza (numerica) sostanziale tra le due definizioni. L'errore considerato è l'errore del metodo di misura (sistemico : lo strumento perturba il sistema), non quello intrinseco dello strumento (non metodologico). L'errore intrinseco dello strumento è espresso con un termine di errore in valore assoluto più una percentuale del valore di fondoscala (valore misurato):

$$e_{intrinsic} = e_a + e\%V = \text{percentuale della tensione di fondoscala}$$

Il C.E.I. (Comitato Elettrotecnico Italiano) classifica gli strumenti sulla base della loro precisione. Si parla di classe dello strumento, che è il valore numerico dell'errore percentuale del fondoscala. Si distinguono nove classi ($\pm 0.05\%$, $\pm 0.1\%$, $\pm 0.2\%$, $\pm 0.3\%$, $\pm 0.5\%$, $\pm 1.0\%$, $\pm 1.5\%$, $\pm 2.5\%$, $\pm 5.0\%$).

1.2 Multimetro analogico

Vediamo in particolare l'*ohmetro analogico*:

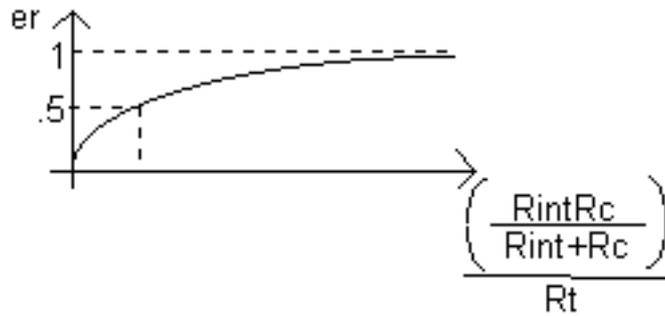


Figura 1.21: Grafico

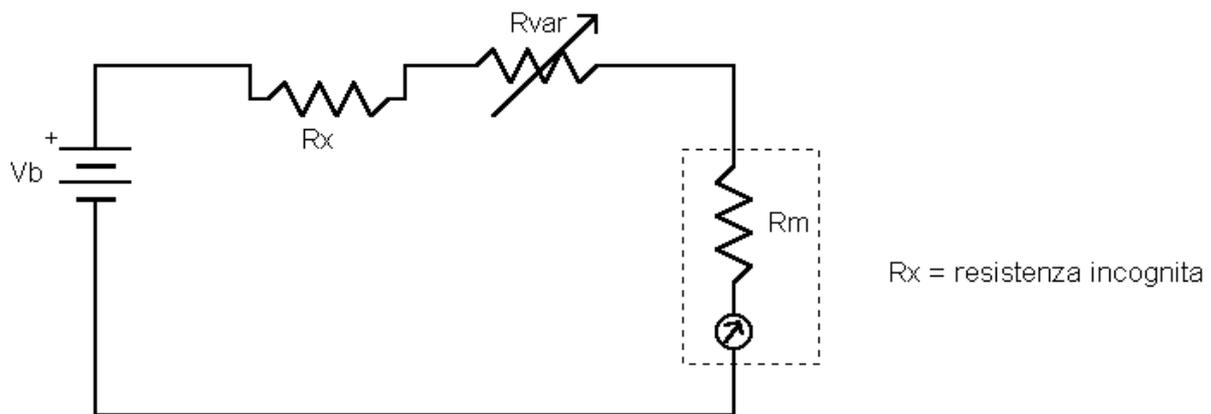


Figura 1.22: Schema serie

1.2.1 Schema serie

$I_m =$ Corrente misurata dall'indicatore $= \frac{V_b}{R_x + R_{var} + R_m} \implies$ La relazione $I_m - R_x$ è di tipo inverso, quindi la scala di resistenze sarà inversa e non uniforme rispetto alla corrente misurata.

Esempio

- $I_{fs} = 50 \mu A$
- $R_m = 1.5 k\Omega$
- $V_b = 1.5 V$
- $R_{var} = ?$

Faccio in modo che $I_m = I_{fs}$ quando $R_x = 0$, cioè $I_{m,R_x=0} = I_{fs} = 50 \mu A = \frac{V_b}{R_{var} + R_m} \implies R_{var} = 28.5 k\Omega$

$$I_{m,R_x=R_{var}+R_m} = 25 \mu A = \frac{V_b}{2(R_{var}+R_m)} = \frac{I_{fs}}{2}, \quad R_x = 30 k\Omega$$

La scala di R va ad infittirsi verso $I = 0$.

Questa soluzione rende lo strumento sensibile al valore della tensione di batteria, nel senso che la graduazione è stata fatta fissando R_{var} in modo tale che I_m ($R_x = 0$) fosse pari alla I_{fs} . Se la V_b

diminuisce possiamo avere sempre fondoscala agendo su R_{var} , però si altera il valore di metà scala, così come quello degli altri valori di resistenza.

Vediamo uno schema modificato:

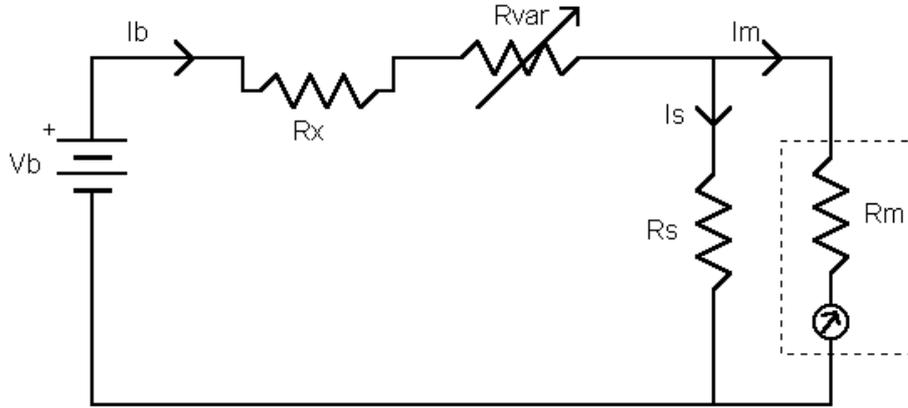


Figura 1.23: Schema modificato

La resistenza complessiva della parte di misura sarà data da :

$$R_T = R_{var} + R_m \parallel R_s \simeq R_{var} \quad (\text{scelta progettuale})$$

In questa condizione il circuito è insensibile alle variazioni di V_b poichè se queste si dovessero presentare sarebbero compensate agendo su R_s senza influenzare R_t .

$$I_b = I_s + I_m$$

$$I_b = \frac{V_b}{R_x + R_{var} + R_m \parallel R_s} \simeq \frac{V_b}{R_x + R_{var}}$$

$$I_m = \frac{V_m}{R_m} \simeq \frac{I_b R_m \parallel R_s}{R_m}$$

Vogliamo $I_{m, R_x=0} = I_{fs} = \frac{V_b R_m \parallel R_s}{R_m}$; Se cambia V_b posso avere lo stesso valore agendo su R_s .

Si mantiene costante questa quantità:

$$\frac{V_b R_m \parallel R_s}{R_m}$$

L'influenza sulla corrente di fondoscala delle variazioni della tensione di batteria può dunque essere compensata agendo su R_s e non su R_{var} . Manteniamo la stessa relazione di scala, inserendo $R_x \implies I_m = \frac{V_b R_m \parallel R_s}{(R_x + R_{var}) R_m} \implies$ stessa relazione $I_m - R_x$ avendo calibrato il blocco $\frac{V_b R_m \parallel R_s}{R_m}$ come $I_{fs} R_{var}$.

R_{var} va anche qui a modificare il campo di valori di resistenza nel quale effettuo le misure.

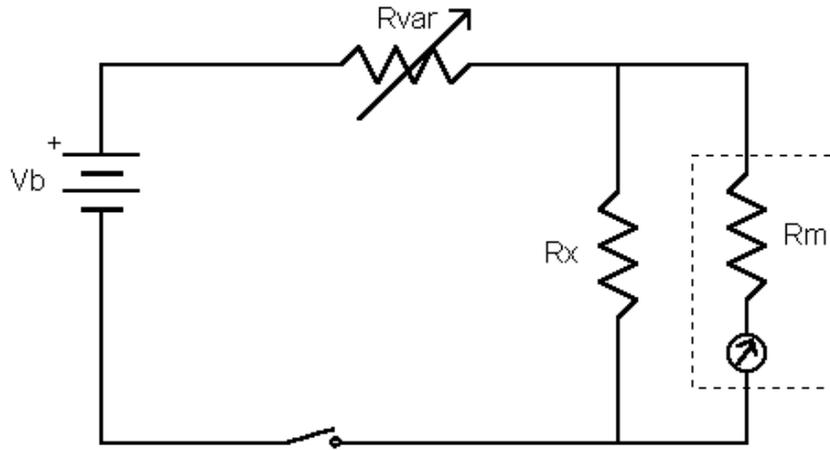


Figura 1.24: Schema parallelo

1.2.2 Schema parallelo **

R_x è in parallelo allo strumento; si misura la resistenza in funzione del rapporto delle resistenze R_m ed R_x .

Esempio

- $I_{fs} = 10 \text{ mA}$
- $R_m = 2 \Omega$
- $V_b = 1.5 \text{ V}$
- $R_{var} = ?$

$$I_{m,R_x=\text{aperto}} = I_{fs} = \frac{V_b}{R_{var} + R_m} \implies R_{var} = \frac{1.5}{10 \cdot 10^{-3}} - 2 \Omega = 148 \Omega$$

$$I_m = \frac{V_b}{R_{var} + R_m \parallel R_x} \frac{R_m \parallel R_x}{R_m} = \frac{V_b}{R_{var} + \frac{R_m R_x}{R_m + R_x}} \frac{R_x}{R_m + R_x} = \frac{V_b R_x}{R_{var} R_m + R_x R_{var} + R_m R_x}$$

$$= \frac{V_b}{R_m + R_{var} + \frac{R_m R_{var}}{R_x}} = \text{condizioni di lettura a mezza scala} = \frac{V_b}{R_{var} + R_m} \frac{1}{2}$$

$$R_m + R_{var} + \frac{R_m R_{var}}{R_x} = 2R_{var} + 2R_m$$

$$R_{var} R_x + R_m R_x - R_m R_{var} = 0$$

$$R_x = \frac{R_m R_{var}}{R_m + R_{var}} \implies R_{x, I_m = \frac{I_{fs}}{2}} = R_m \parallel R_{var} \quad \text{Nell'esempio } R_x = 1.97 \Omega$$

L'interruttore è posto per evitare dissipazione di potenza quando nulla è connesso.

Nella *fotocopia 7* sono mostrati alcuni esempi di sonde, da collegare ad un multimetro, in grado di estendere i range di misura; nella *figura a)* la sonda impiega un partitore per poter misurare alte tensioni, nella *figura b)* la sonda è una pinza amperometrica - tale da non richiedere l'apertura del circuito per effettuare la misura - che include al suo interno un trasformatore con più spire nel

secondario che nel primario (questo con una sola spira) per la misura di elevate correnti; la *figura c)* indica una sonda ad effetto Hall; nello *schema d)* la sonda include uno schema di raddrizzamento con condensatore di filtraggio.

1.3 Misure potenziometriche

Strumenti per la misura della tensione senza caricare il circuito di misura. Ci si pone in una situazione di equilibrio. Facciamo riferimento al seguente schema di principio:

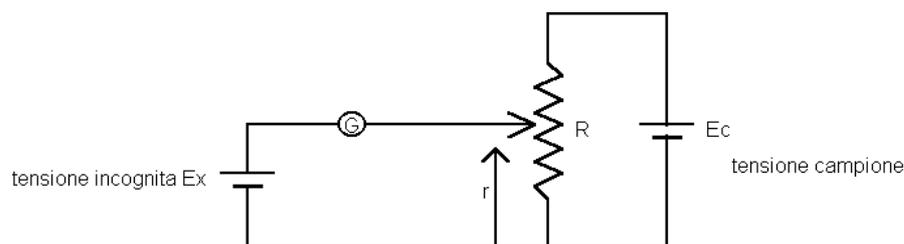


Figura 1.25: Schema elettrico

La misura di V_x è effettuata su una scala graduata posta sul reostato. Il contatto mobile può essere sostituito con una disposizione di resistenze (cosicché le variazioni siano discrete). In condizioni di equilibrio la resistenza di carico per le tensioni di riferimento è costante - ci sono accorgimenti tali che questo avvenga anche per le variazioni discrete. Il galvanometro consente di stabilire la posizione del contatto mobile nella situazione in cui il galvanometro stesso non è attraversato da corrente. In questa situazione (R =resistenza totale, r =resistenza in questa situazione, ρ =resistenza interna del campione) abbiamo :

$$E_x = \frac{E_c r}{R + \rho_c}$$

Se $\rho_c \neq 0$ ed è incognita e variabile abbiamo un fattore di incertezza sulla misura; un'ulteriore fonte di incertezza è che il nostro campione eroga corrente. Mettiamoci nella condizione in cui la corrente del campione è nulla:

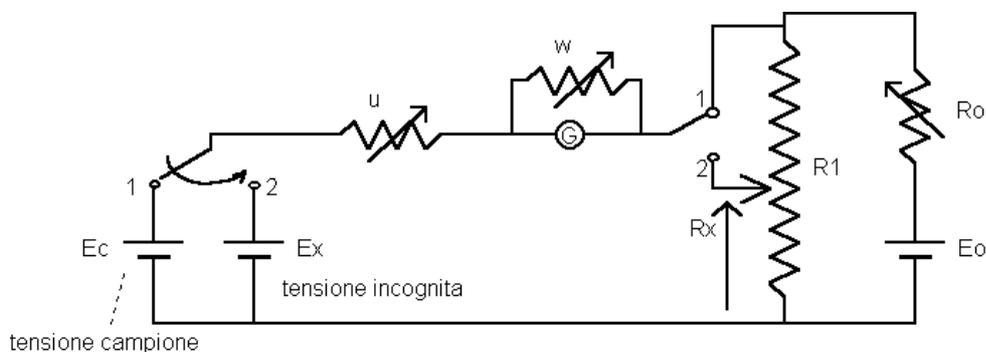


Figura 1.26:

- Fase di calibrazione: Commutatori in posizione 1 \implies cerchiamo l'equilibrio tra la tensione campione ed il generatore E_0

$$E_c = \frac{E_0}{R_1 + R_0 + \rho_0} R_1$$

(ρ_0 =resistenza interna al generatore, ρ_c non interviene perchè in condizioni di equilibrio $I_{E_c} = 0$)

- Fase di misura: Commutatori in posizione 2 \implies cerchiamo l'equilibrio per quel che riguarda E_x variando R_x

$$E_x = \frac{E_0}{R_1 + R_0 + \rho_0} R_x$$

Dalle due relazioni ricaviamo che

$$E_x = \frac{R_x}{R_1} E_c$$

Quindi abbiamo eliminato il problema di conoscere c e di non far passare corrente nel campione.
Osservazione : Le due resistenze variabili (u e w) del circuito servono l'una per proteggere il circuito da eccessive correnti, l'altra per proteggere (shunt) il galvanometro. Inizialmente quindi si provvederà a mantenere elevata w per proteggere da un sovraccarico di corrente.

1.3.1 Potenzimetro di Kelvin

La variazione di R_x può essere effettuata in vari modi, in generale si preferisce lavorare con commutatori a scatti (discreti). Uno degli schemi migliori è il seguente basato su decadi di resistenze disposte in cascata:

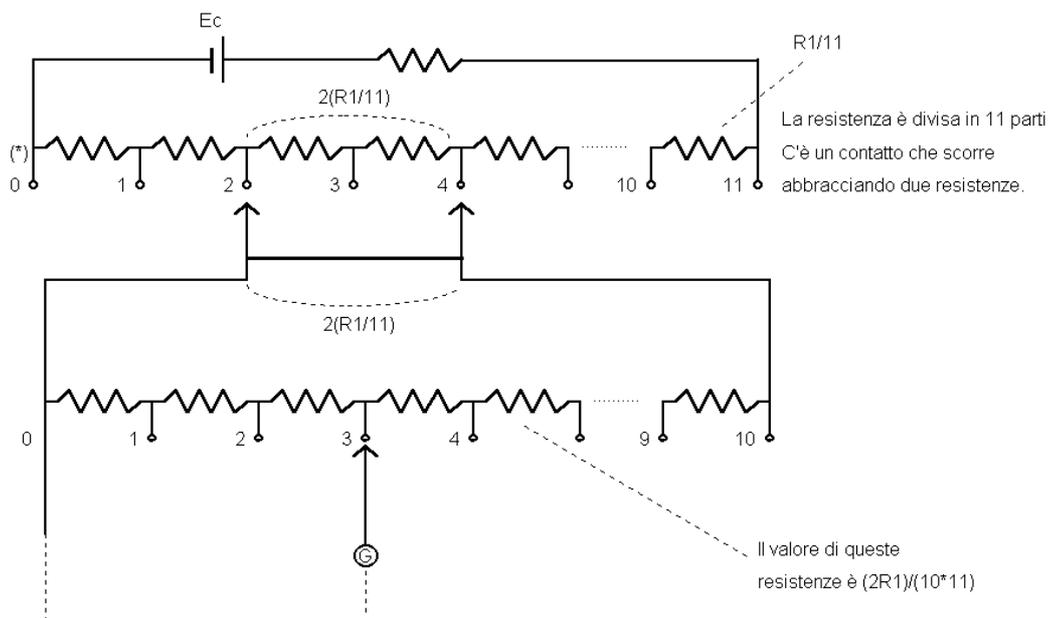


Figura 1.27: Potenzimetro di Kelvin

Nella prima decade tra i due morsetti abbiamo una resistenza pari a $2R_1/10$, alla quale è connessa in parallelo (secondo decade) una resistenza di pari valore, cosicchè complessivamente forniscano una

resistenze pari a $R/10$, e la resistenza totale (*) risulti pari ad R . Si ha una regolazione nell'ordine di $1/100$ della resistenza totale. La regolazione è dunque fine e non altera la resistenza vista dal generatore. Tale schema può essere iterato per aumentare la finezza della regolazione; le decadi intermedie sono costituite da 11 elementi il cui valore è pari a $(2/10)$ del valore del singolo elemento della decade precedente, mentre la decade finale è costituita da 10 elementi.

1.4 Elettrometri

1.4.1 Elettrometro a bilancia

Principi di funzionamento

Presentiamo uno strumento particolarmente adatto per la misura di tensioni elevate AC (bassa frequenza -es. 50 Hz). Sfrutta l'effetto di attrazione tra le piastre di un condensatore ad armatura mobile.

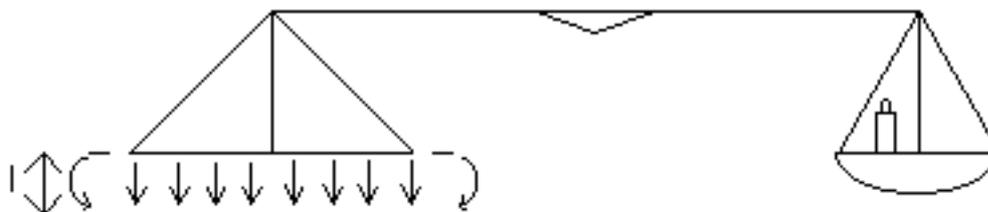


Figura 1.28: Elettrometro a bilancia

Da notare come lo strumento sia dotato, dalla parte della armatura mobile, di un anello di guardia che ha il compito di alleviare i fastidiosi effetti di bordo cui è soggetto il dispositivo; in tal modo le linee di campo elettrico sono abbastanza regolari, oltre che nella parte mobile, anche alla periferia delle armature e quindi la capacità del condensatore è accuratamente modellata dalla relazione del condensatore piano:

$$C = \varepsilon \frac{A}{l}$$

La forza di attrazione che si esercita tra le armature del condensatore (che supponiamo piano in questa nostra trattazione) avrà direzione perpendicolare alle armature stesse e sarà misurata in funzione della tensione applicata (nel nostro caso non esistono altre componenti della forza diverse da zero).

Calcolo della forza *

Per il calcolo della forza suddetta si è scelto, come indicato nella figura precedente, un verso positivo per la stessa e si è inoltre indicato anche quello relativo alla sua equilibrante F_e sulla quale effettivamente si svolge il calcolo. Si osserva infatti che la F , essendo una forza interna la sistema (compreso entro la superficie chiusa S'), non può direttamente comparire nella relazione di bilancio energetico, mentre la sua equilibrante F_e , in quanto forza applicata al sistema dall'esterno, compare nel termine di

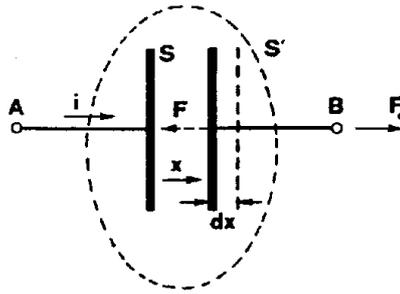


Figura 1.29: Condensatore con armatura mobile

lavoro meccanico (imputabile solamente a forze applicate dall'esterno sul sistema), a patto che si diano al sistema spostamenti virtuali opportuni. Con spostamenti virtuali si intende dire che l'unico requisito richiesto agli spostamenti considerati è solo quello di essere concettualmente realizzabili (non importa in che maniera, purchè sia un modo fisicamente possibile). Ne deriva quindi che tali spostamenti possono essere scelti in modo arbitrario e del tutto autonomo rispetto agli eventuali spostamenti reali del sistema. In definitiva, all'insieme arbitrario di spostamenti virtuali (insieme che deve essere scelto opportunamente al fine di far figurare nel bilancio soltanto le forze che interessano) si associa una trasformazione elettromagnetica, essa pure virtuale nel senso che deve rispettare l'unico vincolo di essere fisicamente realizzabile. Ciò premesso supponiamo di mantenere ferma un'armatura del condensatore (quella collegata al morsetto A) e di assegnare invece all'altra armatura uno spostamento virtuale dx , ove x indica la distanza fra le armature, valutata come ascissa dell'armatura mobile rispetto a quella fissa (con tale interpretazione, a un dx positivo corrisponde un aumento della distanza fra le armature). Considerando del tutto generica la trasformazione virtuale che è associata allo spostamento dx (ed escludendo la presenza di fenomeni dissipativi), l'equazione del bilanciamento si scrive come (L_e =lavoro elettrico; L_m =lavoro meccanico):

$$dL_e + dL_m = dE_e$$

$$v i dt + F_e dx = dE_e$$

ove v e i indicano rispettivamente tensione e corrente relativi alla coppia di morsetti A e B mentre E_e è l'energia elettrostatica immagazzinata dal condensatore:

$$E_e = \frac{1}{2} qv = \frac{1}{2} C v^2 = \frac{1}{2} \left(\varepsilon \frac{A}{l} \right) v^2$$

Il bilancio può scriversi introducendo la carica q del condensatore (ricordo $I = \frac{dq}{dt}$):

$$v dq + F_e dx = dE_e$$

Tenendo ora conto che l'energia elettromagnetica è funzione di q e v :

$$v dq + F_e dx = d \left(\frac{1}{2} qv \right)$$

$$v dq + F_e dx = \frac{1}{2} q dv + \frac{1}{2} v dq$$

$$F_e dx = \frac{1}{2} q dv - \frac{1}{2} v dq$$

Ricordando che $C = \frac{q}{v}$ e quindi $dq = v dC + C dv$ risulta:

$$F_e dx = \frac{1}{2} C v dv - \frac{1}{2} v (v dC + C dv) = -\frac{1}{2} v^2 dC$$

Si avrà infine:

$$F_e = -\frac{1}{2} v^2 \frac{dC}{dx}$$

Quest'ultima relazione può considerarsi un'espressione generale, valida per tutti i condensatori (purchè si interpreti F_e come la componente della forza equilibrante secondo una direzione x qualsiasi), in quanto fin qui non si è fatto alcun riferimento alle proprietà caratteristiche di un particolare tipo di condensatore.

Nel caso di un condensatore piano in cui la capacità è espressa dalla relazione $C = \varepsilon \frac{A}{x}$, l'equazione della forza equilibrante risulta:

$$F_e = \frac{1}{2} \varepsilon \frac{v^2}{x^2} A$$

Essendo però $E = \frac{v}{x}$ risulta:

$$F_e = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 A$$

ove E indica il campo elettrico fra le armature del condensatore. Tale ultima relazione mostra che F_e è sicuramente positiva e quindi, tenuto conto del verso positivo ipotizzato, la forza equilibrante risulta diretta verso l'esterno del sistema e la forza F secondo il verso opposto. Si conclude pertanto che la forza elettrostatica che si esercita fra le armature è una forza di attrazione, come del resto è intuitivo. Per quanto concerne il suo modulo, si osserva che esso risulta espresso dal prodotto della superficie A delle armature per una grandezza ($\varepsilon \frac{E^2}{2}$) che ha le dimensioni di una pressione; tale grandezza è spesso indicata come pressione elettrostatica del condensatore. Come evidenziato dalle precedenti relazioni, la risposta (forza misurata-tensione) della bilancia elettrostatica è di tipo quadratico perciò tale dispositivo può essere impiegato sia per misure in continua che in alternata (avremo una forza proporzionale al valor medio del quadrato della tensione).

1.4.2 Elettrometro a quadranti

In questo caso, quando si applica una tensione tra le due armature dello strumento, si genera una coppia tale da far ruotare l'armatura mobile (calettata sullo stesso asse di quella fissa).

La tensione applicata alle due armature fa sì che queste tendano ad aumentare l'area affacciata. In questo modo si genera una coppia, contrastata dalla deformazione della molla: l'indicatore fornirà il valore della tensione. Determiniamo la coppia tenendo in conto che l'energia è legata all'area affacciata e quindi all'angolo θ ; $\theta \propto V^2$. La capacità C varia con l'angolo θ :

$$C(\theta) = \varepsilon \frac{A(\theta)}{x}$$

L'espressione della coppia equilibrante (fornita dalla molla) sarà del tutto analoga a quella trovata per la bilancia elettrostatica, solo che la capacità dipenderà non più dalla x ma dall'angolo θ :

$$C_e = \frac{1}{2} v^2 \frac{dC(\theta)}{d\theta}$$

Il lavoro meccanico compiuto sarà: $dL_m = C_e d\theta$ (per maggiori particolari riguardanti tali calcoli, confrontare con quanto spiegato nel paragrafo successivo).

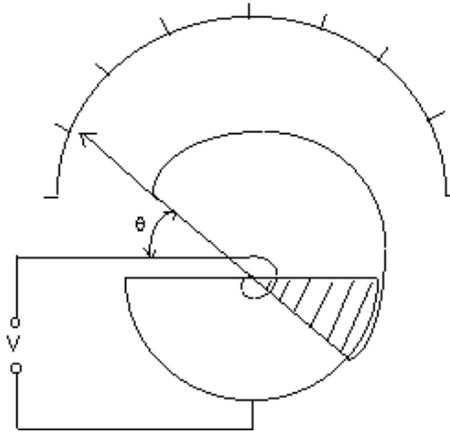


Figura 1.30: Elettrometro a quadranti

1.5 Strumenti elettrodinamici

1.5.1 Generalità

Consentono misure di corrente-tensione-potenza in alternata.

Simile allo strumento a bobina mobile, è costituito da due bobine, una fissa (indice f) percorsa dalla corrente i_f e una mobile (indice m), percorsa dalla corrente i_m , che può ruotare intorno all'asse di simmetria longitudinale di entrambe le bobine. Avremo una coppia cui è soggetta la bobina mobile, coppia generata dall'interazione del campo magnetico (creato a sua volta dalla corrente che scorre nella bobina fissa) con la corrente che scorre sulle spire della stessa. La differenza rispetto agli strumenti PMMC sta nel fatto che il campo magnetico è generato da una bobina (o più tipicamente coppia di bobine) fissa, percorsa dalla corrente da misurare, e non da un magnete permanente.

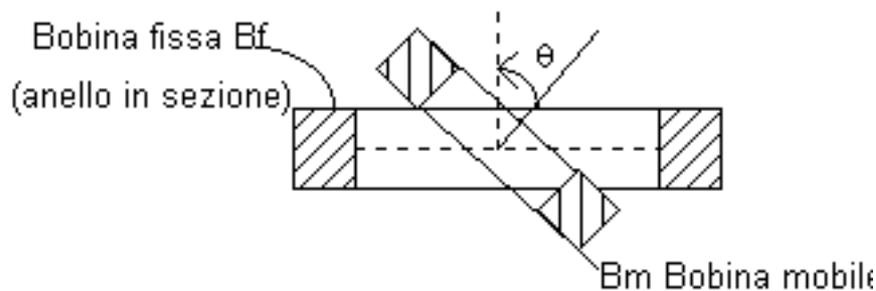


Figura 1.31:

Si può valutare la coppia motrice valutando il campo generato dalla bobina fissa e la forza impressa sulla bobina mobile; in questo caso però il calcolo risulta alquanto complicato in quanto il campo magnetico non è uniforme sulle spire della bobina mobile. Un modo semplice per affrontare questo problema è quello di effettuare il calcolo a partire da considerazioni di tipo energetico sul sistema.

Vogliamo calcolare la coppia C esercitata dalla bobina fissa sulla mobile per una generica posizione di quest'ultima (ossia per il generico angolo θ di figura 1.31 e per due qualsiasi valori delle correnti i_m e i_f).

In prima approssimazione si potrebbe pensare la coppia come (E_m =energia magnetica) $C = -\frac{dE_m}{d\theta}$ (in analogia alla scrittura $Forza = -\frac{d(Energia\ potenziale)}{dx}$). Tale ultima espressione, però, non tiene conto delle interazioni elettriche delle bobine con l'esterno, ad es. al variare di θ come varia la corrente e il lavoro elettrico? È preferibile allora affrontare il problema scrivendo l'equazione di bilancio energetico. A tal fine attribuiamo alla bobina mobile una rotazione virtuale $d\theta$ e scegliamo come trasformazione virtuale del sistema quella caratterizzata dalle condizioni $i_m = \text{cost}$ e $i_f = \text{cost}$ (costanti con θ), condizioni che sono fisicamente realizzabili mediante opportune alimentazioni degli ingressi induttivi delle due bobine. Per la suddetta trasformazione, il bilancio energetico si scrive:

$$dL_e + dL_m = dE_m$$

ove L_e =lavoro elettrico e L_m =lavoro meccanico. Sappiamo che: $dL_e = i_f d\phi_{cf} + i_m d\phi_{cm}$ e inoltre $dL_m = C_e d\theta$ ove ϕ_{ci} è il flusso concatenato con la bobina i mentre C_e è la coppia equilibrante di C . Esplicitando il bilancio energetico:

$$i_f d\phi_{cf} + i_m d\phi_{cm} + C_e d\theta = dE_m$$

Tenendo conto del fatto che l'energia magnetica è esprimibile come:

$$E_m = \frac{1}{2}i_f\phi_{cf} + \frac{1}{2}i_m\phi_{cm}$$

Risulta:

$$i_f d\phi_{cf} + i_m d\phi_{cm} + C_e d\theta = \frac{1}{2}i_f d\phi_{cf} + \frac{1}{2}i_m d\phi_{cm}$$

$$C_e d\theta = -\left(\frac{1}{2}i_f d\phi_{cf} + \frac{1}{2}i_m d\phi_{cm}\right)$$

Interpretando il secondo membro di quest'ultima relazione come energia magnetica, si può scrivere:

$$C_e = -\left(\frac{dE_m}{d\theta}\right)$$

La derivata dell'energia magnetica può effettuarsi considerando la seguente espressione dell'energia stessa:

$$E_m = \frac{1}{2}L_f i_f^2 + \frac{1}{2}L_m i_m^2 + M i_f i_m$$

Dove :

- $I_f(I_m)$ = corrente che attraversa $B_f(B_m)$
- $L_f(L_m)$ = induttanza della $B_f(B_m)$
- M = mutua induttanza = $M(\theta)$

Tenuto conto della costanza delle correnti si ottiene:

$$C_e = -i_f i_m \frac{dM}{d\theta}$$

Questa è la relazione conclusiva e si presta alle seguenti osservazioni:

- La coppia corrispondente a un generico angolo θ , è proporzionale al prodotto delle correnti delle due bobine secondo una costante di proporzionalità che dipende, in genere, da θ (negli apparecchi di misura si realizzano talvolta condizioni costruttive tali da poter ritenere M funzione lineare di θ , cosicchè $\frac{dM}{d\theta}$ risulta indipendente da θ).
- L'effettiva difficoltà che si incontra a calcolare la coppia tramite l'ultima relazione proposta è legata alla difficoltà di ricavare la funzione $M(\theta)$ (la determinazione di tale funzione è, di regola, ardua in quanto richiede la conoscenza del campo generato da una bobina).
- qualunque sia la funzione $M(\theta)$, appare evidente sul piano fisico (tenendo conto dell'ipotesi di simmetria del sistema), che, nell'intervallo $-\pi < \theta \leq \pi$, essa ha di regola un massimo per $\theta = 0$ e un minimo (uguale e contrario al massimo) per $\theta = \pi$, conseguentemente essa risulta crescente ($\frac{dM}{d\theta} > 0$) nell'intervallo $-\pi < \theta < 0$, decrescente ($\frac{dM}{d\theta} < 0$) nell'intervallo $0 < \theta < \pi$.
- La precedente analisi qualitativa della funzione $M(\theta)$ consente di affermare che la coppia C risulta nulla per $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ (tali valori corrispondono a due condizioni di equilibrio in assenza di altre coppie agenti sulla bobina mobile); oltre a ciò, se le correnti sono positive, risulta $C < 0$ per $-\pi < \theta < 0$, $C > 0$ per $0 < \theta < \pi$.
- L'osservazione precedente, riguardante il segno di C , mostra come, in ogni caso, in presenza di correnti positive, la coppia che la bobina fissa esercita sulla mobile è tale che quest'ultima, sotto la sua azione, tende a portarsi nella posizione $\theta = 0$; da ciò deriva anche che, per correnti positive, la posizione di equilibrio $\theta = 0$ è stabile, quella $\theta = \pi$ è instabile.

Per una geometria come quella schematizzata in fig. 1.31 potremmo avere il seguente andamento della mutua induttanza:

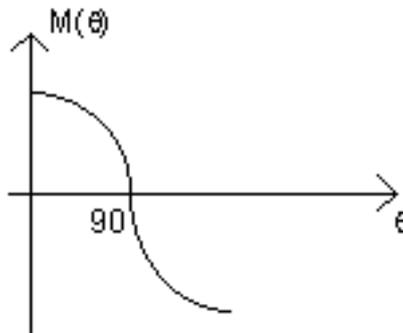


Figura 1.32: Andamento della mutua induttanza

Per quanto riguarda la coppia di deflessione avrà la stessa espressione di quella equilibrante, solo cambiata di segno:

$$C_d = \frac{dE_m}{d\theta} = i_f i_m \frac{dM(\theta)}{d\theta}$$

Se lavoriamo in un intorno di 90° la derivata della mutua induttanza rispetto all'angolo di rotazione della bobina mobile è pressochè costante = k . (Potevamo subito dire che $C_d = k i_f i_m$ con k legato alla geometria del sistema, ma passando per l'energia sappiamo che quel k è $\frac{dM}{d\theta}$ ed è legato dunque ad una precisa grandezza elettrica : la mutua induttanza).

La condizione di equilibrio si raggiunge con $C_d = C_e \propto \theta \propto \alpha$; θ deve essere però essere misurato rispetto alla posizione di riposo della molla (calettata all'indice mobile); tale angolo lo chiamo appunto α =angolo di deflessione dell'indice dalla posizione di riposo. Risulterà: $\alpha = K' i_f i_m$.

Impiego dello strumento elettrodinamico nella misura di grandezze AC: La coppia sarà una grandezza variabile nel tempo e risulterà del tipo:

$$C(t) = k i_f(t) i_m(t)$$

Suppongo $i_f = \sqrt{2} I_f \sin(\omega t)$ e $i_m = \sqrt{2} I_m \sin(\omega t + \beta)$ (i_m in generale sfasata da i_f di un generico β =cost) (dove con I_i si indica il valore efficace). Esplicitando la $C(t)$ possiamo affermare che :

$$C(t) = 2k I_m I_f \sin(\omega t) \sin(\omega t + \beta) = 2k I_m I_f \frac{1}{2} [\cos(\beta) - \cos(2\omega t + \beta)]$$

$$C(t) = k I_m I_f \cos(\beta) - k I_m I_f \cos(2\omega t + \beta)$$

Si nota che il termine $\cos(\beta)$ è costante perciò $C(t)$ possiede una componente continua $k I_f I_m \cos(\beta)$ e una alternata di pulsazione 2ω . Il comportamento dinamico (meccanico) dello strumento è di tipo passabasso perciò non risponde alle sollecitazioni a pulsazione 2ω , ma solo a quelle in continua. Considero allora $\overline{C_d}$ =valor medio della coppia di deflessione= $k I_f I_m \cos(\beta) = \overline{C_d}$. La condizione di equilibrio sarà allora: $\overline{C_d} = C_e \propto \alpha$ con: $\alpha = K' I_f I_m \cos(\beta)$ in alternata, $\alpha = K' I_f I_m$ in continua. Lo strumento risponde ai valori efficaci delle correnti e dipende dall'angolo di fase. Se ne deduce che lo strumento elettrodinamico è utile per effettuare misure sia in DC che in AC.

1.5.2 Amperometro e voltmetro in corrente alternata

Solitamente, per migliorare le caratteristiche del campo magnetico generato dalla bobina fissa, se ne impiegano due; comunque il funzionamento dello strumento non cambia. Tali due bobine fisse sono collegate in modo che la corrente che le attraversa abbia verso tale che i campi magnetici prodotti si sommino e non si contrastino. Inoltre anche la bobina mobile è connessa in modo tale che la corrente che la attraversa sia concorde a quella delle bobine mobili in modo che la coppia di deflessione sia $C_d \propto i^2$ e non $C_d \propto -i^2$, cioè che la deflessione sia in verso positivo ($+\theta$).

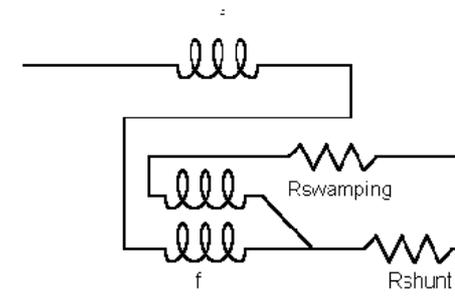


Figura 1.33: Scema elettrico

Senza la R_{shunt} , B_f e B_m sarebbero attraversate dalla stessa corrente I , e la coppia sarebbe proporzionale a I^2 . Per lavorare su portate grandi pongo R_{shunt} e devio parte della corrente. In serie a B_m mettiamo $R_{swamping}$ per ridurre gli effetti della variazione di temperatura (variazione di ripartizione tra la corrente sullo shunt e sulla bobina mobile). Da notare come la $R_{swamping}$ sia preferibile inserirla

in serie alla bobina mobile: essa contribuisce a limitarvi la corrente, in tal modo la bobina mobile può essere realizzata con fili più sottili → minor peso e minor attrito.

Nel funzionamento come voltmetro si inserisce, in serie allo strumento, una resistenza moltiplicatrice.

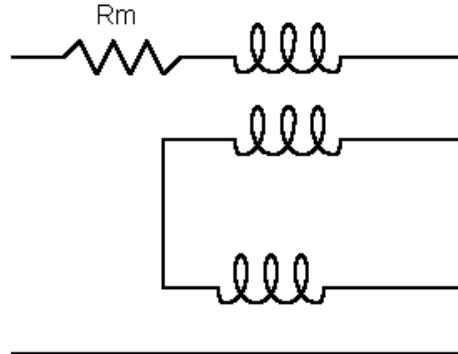


Figura 1.34: Schema elettrico

La sensibilità di questo strumento è ridotta rispetto al caso con magneti permanente; lavoriamo con frazioni di ampère; il fattore di sensibilità è di circa $10 \frac{\Omega}{V}$ in confronto ai $10 \frac{k\Omega}{V}$ per gli strumenti a magneti permanente e bobina mobile (PMMC); proprio a causa di questa scarsa sensibilità se ne sconsiglia l'uso per i circuiti elettronici. Gli strumenti a bobina mobile sono però in generale più precisi di quelli PMMC in quanto la risposta dei primi dipende solo da caratteristiche geometriche dello strumento (bobine) e non da caratteristiche dei materiali (come il magnete impiegato nei PMMC), che possono variare con il tempo e con escursioni termiche.

Osservazione : Avendo una risposta proporzionale ad $I_f \cdot I_m$ lo strumento, usato come voltmetro o amperometro, ha una coppia motrice sempre dello stesso segno indipendentemente dal segno della corrente e della tensione. Il segno della coppia dipende dal verso di avvolgimento delle spire.

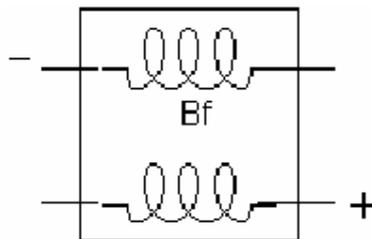


Figura 1.35:

1.5.3 Wattmetro

Un primo possibile schema:

La corrente che attraversa B_m è proporzionale alla caduta di tensione che si localizza su R_l , mentre la corrente che attraversa B_f è proporzionale alla corrente su R_l : la coppia sarà dunque legata al

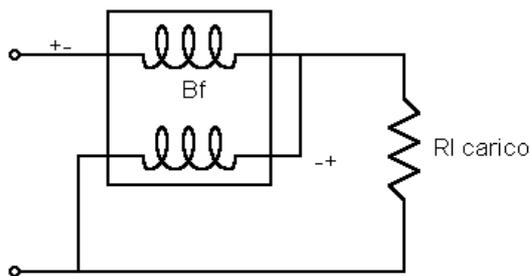


Figura 1.36: Schema elettrico per basse tensioni ed elevate correnti di carico

prodotto della V e della I sul carico, cioè proporzionale alla potenza dissipata. $C_d \propto I_f I_m$ $I_m \propto V_l$
 $I_f = I_m + I_l$

$$C_d \propto I_f I_m \propto V_l (I_m + I_l) = V_l I_l \left(1 + \frac{I_m}{I_l} \right)$$

$V_l I_l$ è proprio la potenza sul carico, quella che ci interessa misurare. Il termine in più $\frac{I_m}{I_l}$ è tanto più trascurabile quanto più V_l è basso e I_l alto. Perciò a *basse tensioni* ed *elevate correnti* di carico converrà usare lo schema precedente.

Se lavoriamo con *alte tensioni* e *basse correnti* di carico, la configurazione più conveniente sarà la seguente :

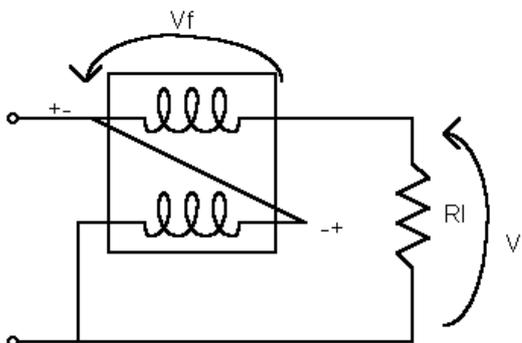


Figura 1.37: Schema elettrico per alte tensioni ed basse correnti di carico

In tale situazione avremo:

$$C_d \propto I_f I_m \propto I_l (V_l + V_f) = V_l I_l \left(1 + \frac{V_f}{V_l} \right)$$

In tal caso l'errore sistematico $\propto \frac{V_f}{V_l}$ è tanto minore quanto più è alta la tensione V_l e tanto minore è la corrente I_l ($\propto V_f$).

In questi schemi si deve rispettare l'indicazione di collegare al carico i morsetti + - in maniera opportuna, ovvero rispettando sempre le polarità indicate da + e -, cosicchè la deviazione dello strumento sia sempre nella stessa direzione.

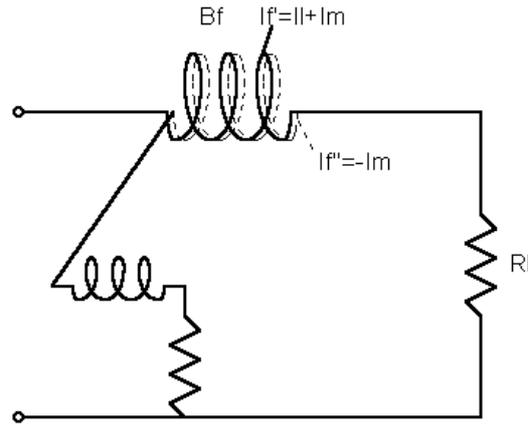


Figura 1.38: Scema elettrico

Wattmetro compensato

Su B_f c'è un avvolgimento supplementare con corrente $-I_m$ che è in senso opposto ad I_f ; si ha una compensazione sulla corrente della B_f .

$$I_f \longrightarrow 2 \text{ avvolgimenti } \begin{cases} I_l + I_m \\ -I_m \end{cases}$$

In tal modo l'effetto complessivo sulla bobina fissa è che ($I_f^{tot} = I_l$) essa porta a creare una $C_d \propto I_f^{tot} = I_l$, quindi I_m non influisce in alcun modo sulla creazione della C_d .

$$C_d \propto I_f^{tot} I_m \propto V_l I_l$$

Quindi il campo è dovuto soltanto alla corrente del carico I_l . Di qui la compensazione. Per non rovinare gli isolamenti delle bobine a causa di surriscaldamenti, è necessario che la portata del wattmetro, in termini di tensione, sia adeguata alla tensione di carico da misurare. Per tale motivo, in sede di misura, è opportuno cominciare con resistenze moltiplicatrici elevate e poi diminuirle pian piano secondo necessità.

1.6 Strumenti AC basati su PMMC

1.6.1 Voltmetro AC

Il fatto che lo strumento elettrodinamico risponda in maniera quadratica, non significa che sia possibile misurare il valore efficace di una grandezza a qualunque frequenza, perchè al crescere di quest'ultima, aumenta in maniera considerevole l'impedenza dello strumento; in definitiva possiamo misurare solo grandezze a frequenze di qualche centinaio di hertz.

Quando si hanno dei segnali AC, essi possono essere raddrizzati e poi misurati con PMMC, strumenti che rispondono al valor medio.

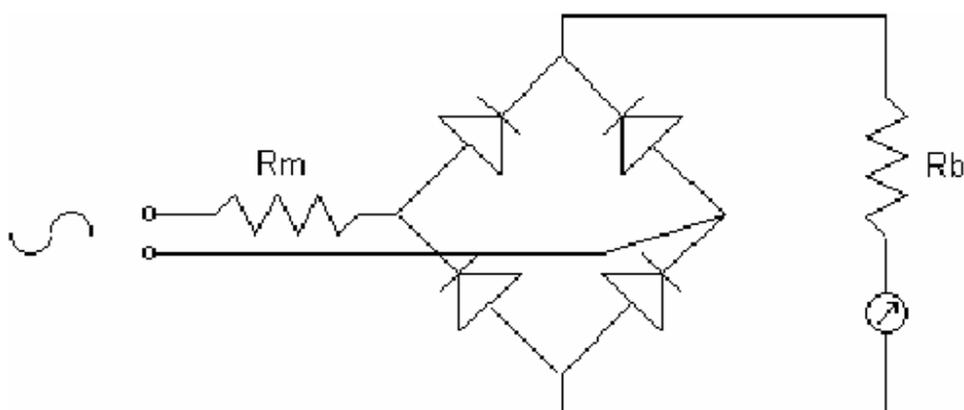


Figura 1.39: Schema elettrico

R_b è la resistenza della bobina mobile. Abbiamo un raddrizzamento della corrente. R_m è una resistenza moltiplicatrice.

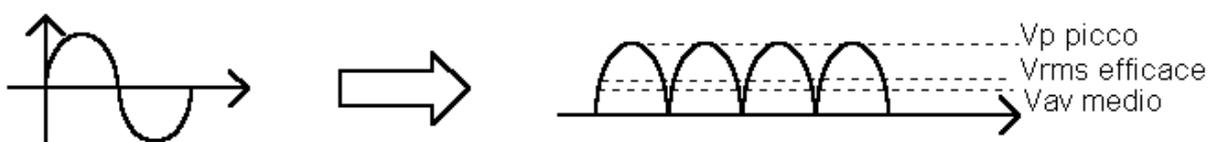


Figura 1.40: Risultato ottenuto

Lo strumento dà un'indicazione proporzionale al valor medio; per onde sinusoidali:

$$V_{av} = \frac{2}{\pi} V_p \approx 0.636 V_p$$

La scala dello strumento è graduata rispetto ai valori efficaci.

$$V_{rms} = V_{efficace} = \frac{1}{\sqrt{2}} V_{picco} \approx 0.707 V_{picco}$$

Considero la seguente tabella:

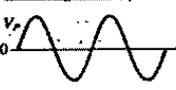
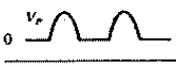
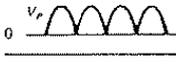
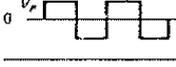
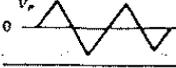
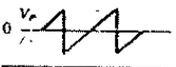
Waveform	RMS value	Form factor	Multiply AC meter reading by to obtain correct RMS value
	$0.707V_p$	1.111	1.0
	$0.5V_p$	1.571	1.414
	$0.707V_p$	1.111	1.0
	$0.5V_p$	1.0	0.9
	$0.707V_p$	1.414	1.273
	$\sqrt{D}V_p$	$1/\sqrt{D}$	$0.9/\sqrt{D}$
	$0.577V_p$	1.154	1.039
	$0.577V_p$	1.154	1.039

Figura 1.41: Tabella

Attraverso il form factor, conoscendo il tipo di forma d'onda di partenza e avendola raddrizzata per misurarla, si può calcolare il vero V_{rms} corrispondente alla forma d'onda di partenza. Per uno strumento sensibile al valor medio si ha che: *valor efficace* = (*form factor*) (*valor medio*). Tipicamente la scala dello strumento è graduata in valore efficace, riferito ad un segnale sinusoidale, anche se lo strumento risponde al valor medio del segnale raddrizzato. Se il segnale misurato non è sinusoidale, devo correggere la lettura moltiplicandola per il fattore correttivo.

$$form\ factor = \frac{V_{rms}^{segnale}}{V_{medio}^{segnaleraddrizzato}} = \frac{V_{rms}^{sinusoide}}{V_{medio}^{segnaleraddrizzato}} \frac{V_{rms}^{segnale}}{V_{rms}^{sinusoide}}$$

$$fattore\ correttivo = \frac{V_{rms}^{segnale}}{V_{rms}^{sinusoide}}$$

Con riferimento alla tabella precedente, si nota che la quarta colonna indica i valori per cui moltiplicare la lettura del sistema di misura, per ottenere il corretto valore rms.

Esempio

E' dato un treno di impulsi rettangolari:

Sullo strumento tarato sulle onde sinusoidali leggo un valore $V_{rms} = 6.42$; voglio risalire ai valori V_{rms} e V_p reali. Innanzitutto calcolo il duty cycle (ciclo di servizio)

$$D = \frac{0.2}{0.8} = 0.25$$

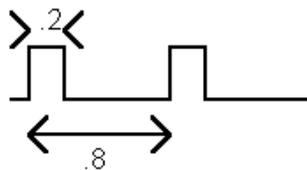


Figura 1.42: Treno di impulsi rettangolari

Il fattore di conversione è $\frac{0.9}{\sqrt{D}}$; quindi:

$$V_{rms-correcto} = 6.42 \frac{9}{\sqrt{0.25}} = 11.56 \text{ V}$$

$$V_{picco} = \frac{V_{rms}}{\sqrt{D}} = 12.84 \text{ V}$$

Ecco lo schema con raddrizzamento a semionda, per ridurre gli effetti di caduta di tensione non lineare sui diodi:

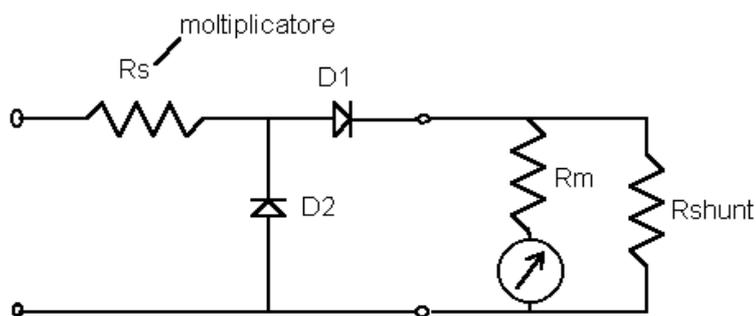


Figura 1.43: Schema con raddrizzamento a semionda

Su D1 scorre una corrente significativa, dunque la tensione ai suoi capi è circa costante; D2 fa sì che quando la tensione è negativa le perdite per corrente inversa su D1 siano piccole, essendo la caduta su D1 piccola. Con tale schema circuitale lo strumento è meno sensibile. Il raddrizzamento a mezza onda e la corrente di shunt riducono la corrente attraverso lo strumento, dando luogo a problemi di sensibilità.

1.6.2 Amperometro AC

In alternativa a questo schema si può impiegare un trasformatore di corrente e ricorrere alla configurazione vista come voltmetro:

Si consideri la figura 1.46. Nella figura 1.46a è rappresentato lo strumento a bobina mobile ed in figura 1.46b il meccanismo di smorzamento. I materiali magnetici hanno correnti parassite che smorzano il movimento; nello strumento elettrodinamico tale smorzamento è più limitato, quindi si ricorre a meccanismi smorzatori supplementari. Nella figura 1.47 sono evidenziati i versi dei campi magnetici.

Nella tabella di figura 1.48 è presentato un elenco degli strumenti per la misura di correnti-tensioni in

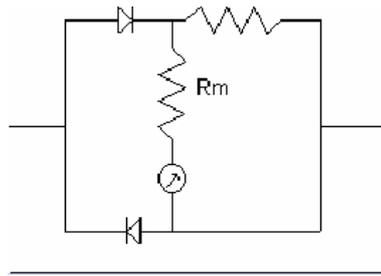


Figura 1.44: Schema elettrico

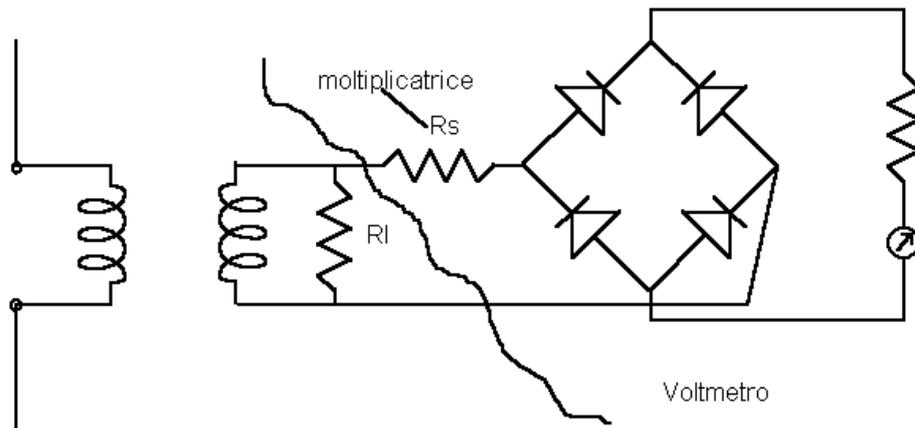


Figura 1.45:

AC-DC con diversi range. (Lo strumento moving iron -a ferro mobile-, che non vedremo nel dettaglio, è caratterizzato da un indice solidale ad un elemento ferromagnetico, attirato da una bobina percorsa da corrente; è robusto ma poco preciso.)

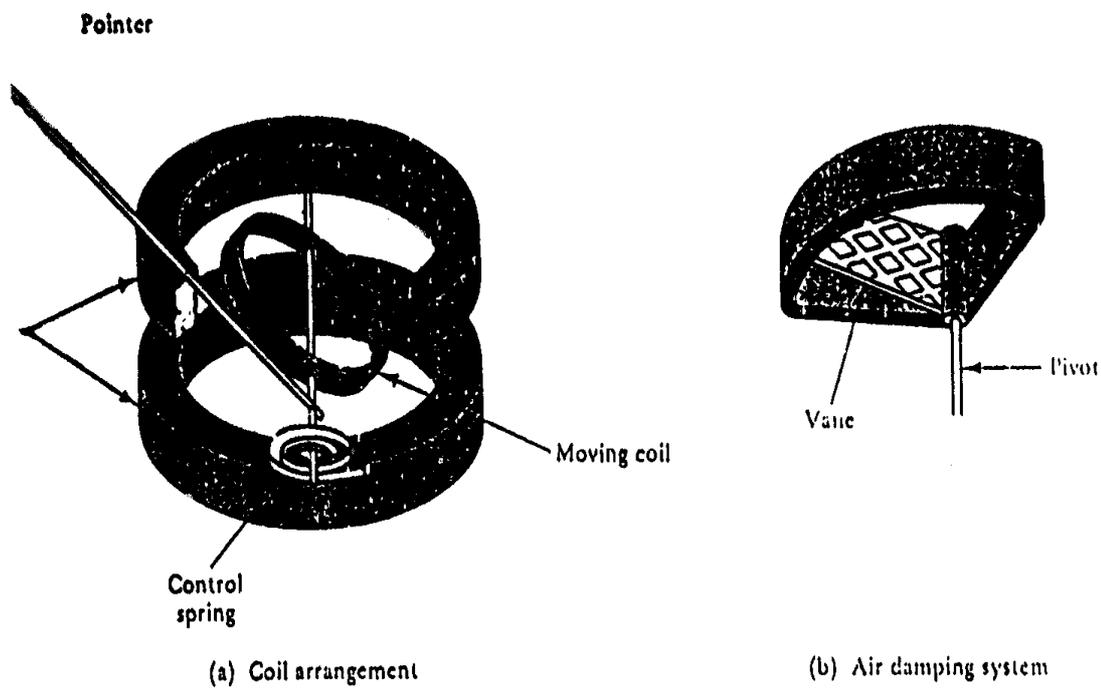
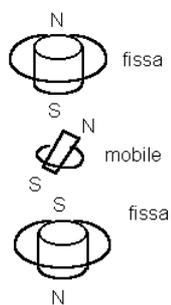


Figura 1.46:



(e viceversa cambiando verso alla corrente)

Figura 1.47:

Meter type	Suitability	Major use/feature
d'Arsonval	DC only	DC current and voltage measurement in low and medium impedance circuits
Moving Iron	DC or AC	Rough indication of large current or voltages at power-line frequencies
Electrodynamometer	DC or AC	Precise AC voltage and current measurement at power-line frequencies
Electrostatic	DC or AC	High Voltage measurements
Electronic	DC or AC	Up to high audio frequencies without RF probe. High input impedance
Rectifier	AC only	With a d'Arsonval movement, used for medium sensitivity applications at audio frequencies
Thermocouple	DC or AC	RF currents, low input impedance

Figura 1.48: Classificazione di strumenti AC e DC

Capitolo 2

Strumenti elettronici

2.1 Voltmetri digitali

Strumento che fornisce l'indicazione della tensione sotto misura in forma numerica.

2.1.1 Conversione a singola rampa

Vediamo uno schema di conversione tensione-tempo a singola rampa. Abbiamo un comparatore che confronta la tensione da misurare con quella fornita da un generatore di rampa (tensione che varia linearmente).

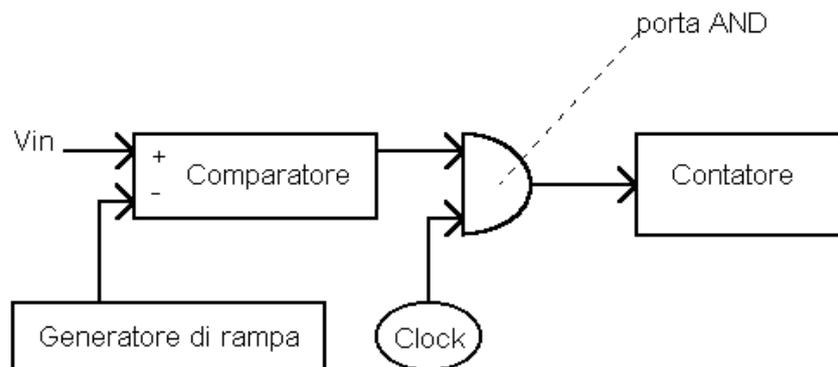


Figura 2.1: Schema di conversione a singola rampa

Quando la tensione V_{in} è minore della tensione a rampa l'uscita del comparatore cambia segno, si interrompe il flusso di segnali che vanno dall'orologio al contatore. Il conteggio del contatore è proporzionale al valore della tensione di ingresso.

Esempio Rampa : $1 \frac{V}{ms}$

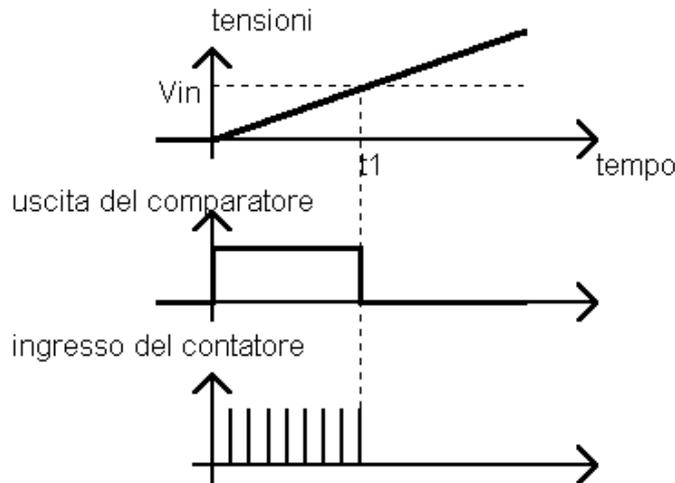


Figura 2.2: Temporizzazione

Freq. orologio : $f_c = 100 \text{ KHz}$ $V_{in} = 2 \text{ V}$ $\Rightarrow T_1 = 2 \text{ ms}$ $\Rightarrow t_1 * f_c = \# \text{ conteggi} = 200$

L'accuratezza del sistema viene a dipendere dalla stabilità del segnale di clock. Si ricorre ad uno schema diverso (doppia rampa) per migliorare l'accuratezza.

2.1.2 Conversione a doppia rampa

Si impiega una doppia integrazione : una riferita al segnale di ingresso ed una riferita ad un segnale noto : per confronto si risale alla tensione di misura.

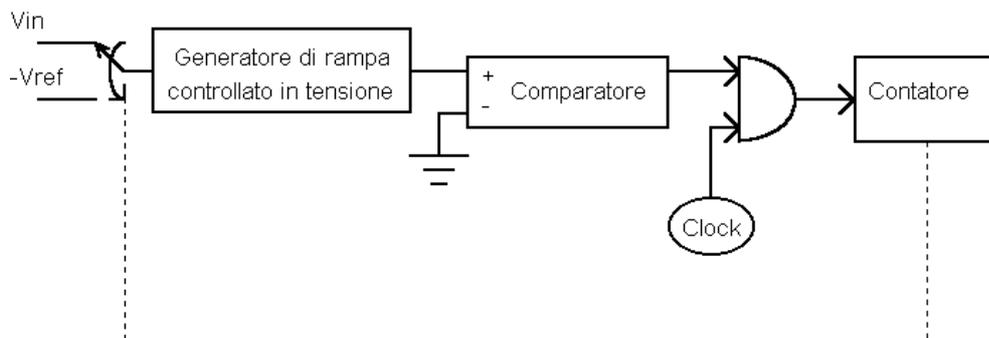


Figura 2.3: Schema di conversione a doppia rampa

La tensione di controllo del generatore di rampa può essere o la tensione in ingresso o una tensione di riferimento. Inizialmente V_{in} controlla la pendenza della rampa, la quale procede finché il contatore arriva a fondoscala. L'interruttore allora commuta e si ha una rampa di segno negativo dovuta a V_{ref} .

Si ricava V_{in} attraverso t_1 e t_2 . (t_1 è determinato dal fondoscala del contatore, t_2 dall'indicazione del comparatore che fissa il valore del contatore - il confronto è fatto con la tensione nulla)

$$V_0 = \frac{V_{in}}{\tau} t_1 = \frac{V_{ref}}{\tau} t_2$$

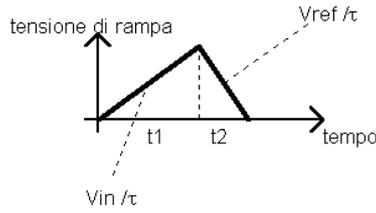


Figura 2.4: Tensione di rampa

$$V_{in} = \frac{t_2}{t_1} V_{ref}$$

$$t_1, t_2 = \# \text{intervalli di clock} \implies \frac{t_2}{t_1} = \frac{N_2}{N_1}$$

$$V_{in} = \frac{N_2}{N_1} V_{ref}$$

La determinazione di V_{in} risulta essere indipendente dalla frequenza di clock (e dalle sue variazioni).

2.1.3 Conversione tensione-frequenza

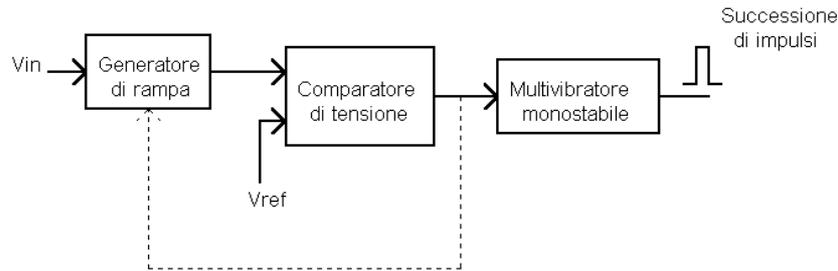


Figura 2.5: Schema di conversione tensione-frequenza

Il comparatore confronta la rampa con la V_{ref} e l'uscita va in un multivibratore; la frequenza degli impulsi è proporzionale alla pendenza della rampa (tempo impiegato dalla rampa per raggiungere V_{ref}) ovvero a V_{in} . L'uscita del comparatore riavverte il generatore di rampa.

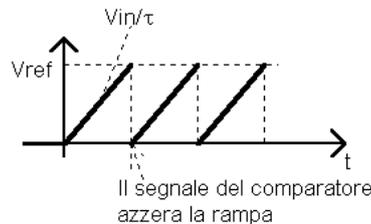


Figura 2.6:

2.1.4 Conversione A/D con rampa a gradini

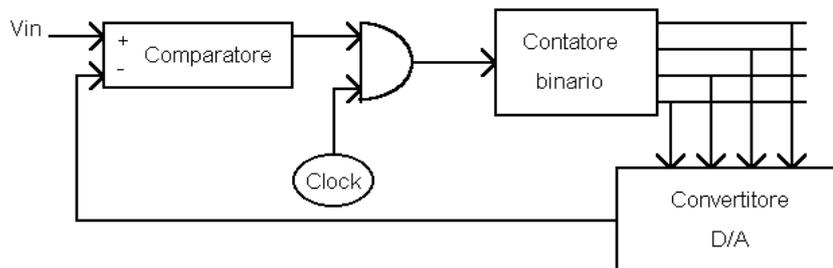


Figura 2.7: Schema di conversione A/D con rampa a gradini

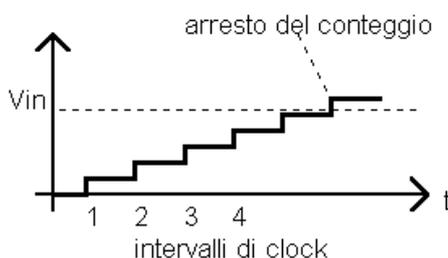


Figura 2.8:

Viene generata una rampa a gradini che si interrompe quando questa supera il valore della tensione di ingresso.

Questi schemi hanno l'inconveniente che la durata della misura dipende dalla V_{in} ; per effettuare misure in tempi prefissati, come talvolta richiesto, si introduce una logica di controllo più complessa, come nel caso seguente:

2.1.5 Conversione A/D per successive approssimazioni

Il confronto avviene con la lettura di metà fondoscala. Se tale confronto è negativo si scende con il valore di tensione e il confronto è fatto con una tensione ridotta di un valore binario (viene alterata ad ogni passo una cifra binaria a partire da quella più significativa).

Tempo di lettura = $\frac{n}{f}$ (N=n bit registro, f=frequenza di clock)

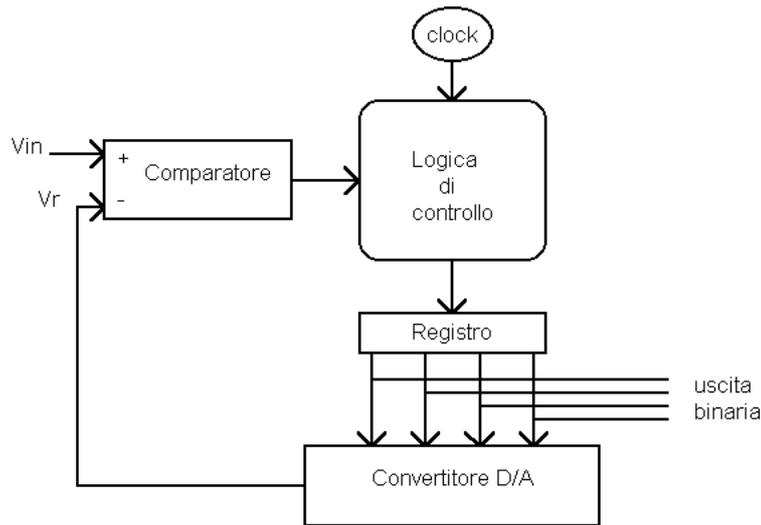


Figura 2.9: Schema di conversione A/D per successive approssimazioni

Esempio

Analizziamo nel dettaglio la successione dei passi di conversione nel caso in cui il registro sia a quattro bit:



Figura 2.10: Esempio

La configurazione definitiva del registro, che indica la misura voluta, è 0001. Se avessimo avuto un ulteriore bit di precisione, avremmo effettuato ancora un confronto (tra 00011 e V_{in}) decidendo se confermare o meno l'ultimo bit al valore 1.

Per misure in alternata possiamo introdurre schemi di raddrizzamento ed analizzare V_{rms} , V_{medio} o V_{picco} riutilizzando questi schemi.

2.2 Tensioni AC : misura della tensione di picco

Si raddrizza la tensione, dopodichè si carica un condensatore alla tensione di picco.

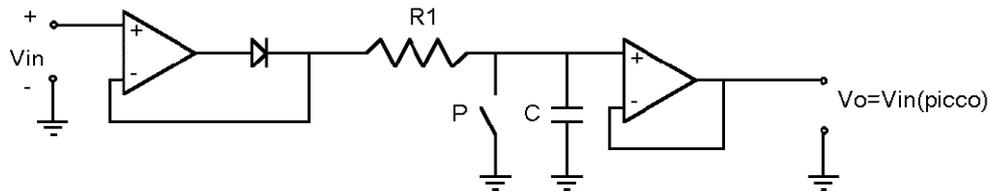


Figura 2.11: Misura della tensione di picco

Il primo operazionale carica il condensatore alla tensione di picco V_{in} ; il secondo permette la lettura della tensione di picco senza scaricare il condensatore. R_1 è inserita per evitare oscillazioni del sistema. L'interruttore a pulsante P permette di resettare il sistema (scarica C) prima di una nuova valutazione di V_{in} .

Analizziamo la misura sul valore quadratico mediante confronto tra la grandezza AC ed una corrispondente misura DC.

2.3 Tensioni AC : misura di rms

Un modo possibile è quello di analizzare gli effetti termici delle due tensioni e confrontarli impiegando, come sensori di temperatura, due diodi. Si uguaglia la temperatura dei due diodi (determinata proprio dal V_{rms} della tensione AC). La misura di tensione viene ricondotta dunque alla misura della tensione equivalente dc.

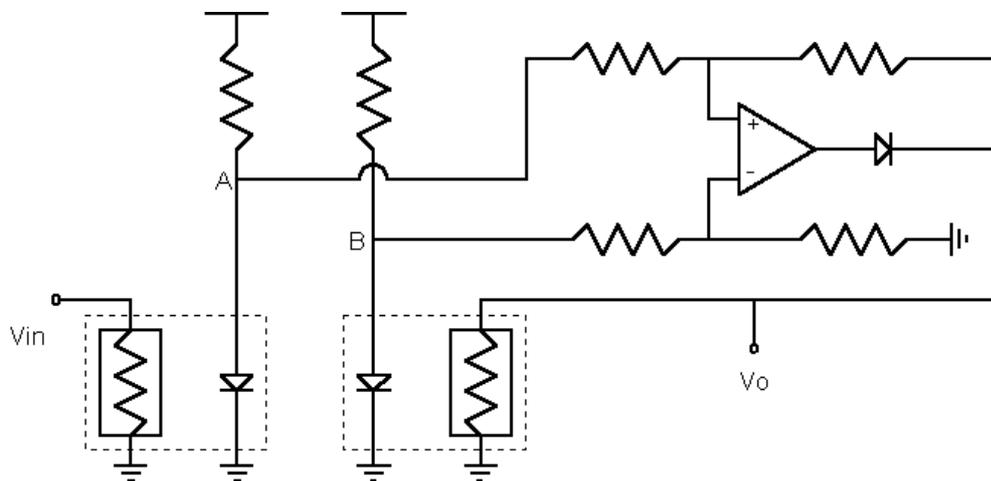


Figura 2.12: Misura di rms

La temperatura del diodo a sinistra è determinata da quella della resistenza pilotata da V_{in} (i diodi sono opportunamente polarizzati). Se i due diodi sono alla stessa temperatura i due punti A e B sono allo stesso potenziale, ed è proprio la differenza di potenziale tra A e B che va a pilotare V_o . Quando $V(A)=V(B)$ $V_o = V_{rms}$ (stesso effetto riscaldante); V_o può essere valutata mediante un volmetro in corrente continua.

Capitolo 3

Oscilloscopi

Consideriamo la struttura dello strumento (*f.17 fig.11-1*).

(CRT = Cathode Ray Tube)

L'oscilloscopio da una rappresentazione luminosa su uno schermo di un diagramma XY bidimensionale. Tipicamente il segnale orizzontale è il tempo e quello verticale un segnale di cui si vuole studiare l'evoluzione; *in fig. 11-2 f.18 si vede la combinazione del segnale temporale e del segnale di ingresso.*

3.1 CRT

(*f.17 fig.9.1*) Possiamo distinguere 5 regioni : la prima regione è responsabile della generazione del fascio elettronico, segue una regione di focalizzazione (focusing), una regione di deflessione, poi di post-accelerazione, ed infine lo schermo.

1. La generazione del fascio elettronico comprende una struttura a triodo : c'è un catodo, una griglia ed un anodo. Il catodo è dotato di un filamento riscaldatore, tale che il materiale del catodo stesso (un ossido metallico) emetta elettroni per effetto termoionico. Questi elettroni vengono accelerati dall'anodo per avere un fascio elettronico con energia sufficiente a dar luogo ad effetti luminosi. La tensione di accelerazione è nell'ordine di 2kV. La griglia regola l'intensità del fascio ed ha potenziale inferiore a quello di catodo.
2. L'anodo è indicato con A1 : è forato per lasciar passare gli elettroni. Il fascio subisce una focalizzazione tramite le cosiddette *lenti elettrostatiche*, che hanno lo scopo di ridurre la divergenza del fascio, rendendo più nitido il punto sullo schermo.
3. La deflessione è verticale ed orizzontale. Nel nostro caso è realizzata con un campo elettrostatico tra due coppie di piastre di deflessione. Con riferimento alla *fig.5 f.19* analizziamo la deflessione verticale. Il fascio entra con una velocità v_p che dipende dal potenziale di anodo :

$$\frac{1}{2}mv_p^2 = (\text{energia cinetica}) = qV_{\text{accelerazione}} \implies v_p = \sqrt{\frac{2qV_a}{m}}$$

Se è presente un campo elettrico gli elettroni ricevono un'accelerazione in senso perpendicolare

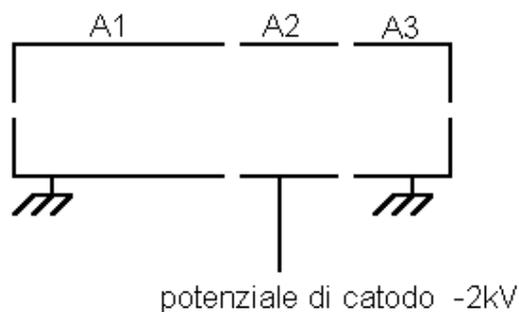


Figura 3.1:

al fascio: la componente orizzontale della velocità resta costante.

$$\vec{v} = \vec{v}_{orizzontale} + \vec{v}_{verticale} = \vec{v}_p + \vec{v}_d \quad \vec{v}_d = at$$

L'elettrone ha un moto parabolico tra le placche, per poi proseguire con un moto rettilineo.

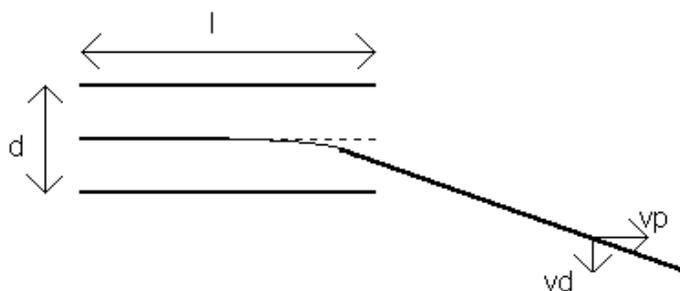


Figura 3.2:

$v_d = at_d$; t_d è il tempo di deflessione, il tempo che l'elettrone ha impiegato a passare tra le placche.

$$t_d = \frac{l}{v_p}$$

L'accelerazione è $\frac{F}{m}$; $a = \frac{qE}{m}$ $E = \frac{V_d}{d}$.

$$\Rightarrow a = \frac{qV_d}{md} \quad V_d \text{ potenziale di deflessione}$$

d_s = deflessione del fascio sullo schermo.

La traiettoria rettilinea è tangente alla parabola nel punto di uscita delle placche; tale tangente tocca l'asse verticale ad $\frac{l}{2}$.

$$\frac{v_d}{v_p} = \frac{d_s}{l_s} \quad v_d = \frac{qV_d}{md} \frac{l}{v_p}$$

$$\Rightarrow d_s = l_s \frac{qV_d}{md} \frac{l}{v_p^2}$$

$$\Rightarrow d_s = l_s \frac{l}{2d} \frac{V_d}{V_a}$$

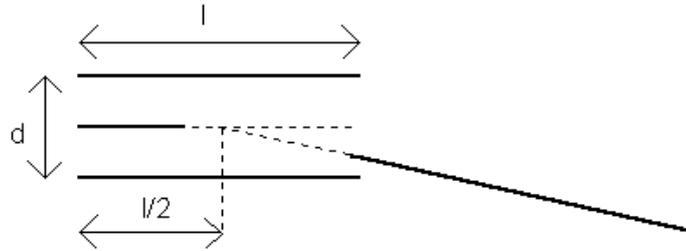


Figura 3.3:

Siamo interessati ad avere deflessioni grandi a parità di segnale, quindi possiamo definire la *sensibilità alla deflessione* come

$$\frac{d_s}{V_d} = \frac{1}{2} l_s \frac{l}{d} \frac{1}{V_a}$$

Essa è tanto maggiore quanto più lungo è il tubo (l_s), quanto maggiore è il rapporto l/d delle placche (che però da un problema di angolo di scansione, che risulta ridotto al crescere di l/d); V_a piccolo aumenta la sensibilità ma rischia di rendere insufficiente la luminosità sullo schermo.

- La regione di post-accelerazione viene incontro a quest'ultimo problema, rendendo più intenso il fascio elettronico.

f.18 fig.11.5 Sono mostrate diverse strutture possibili per ciò che riguarda l'accelerazione : nella prima il fascio viene accelerato una sola volta; nella seconda si nota l'inserimento di una spirale resistiva che fa sì che le equipotenziali siano perpendicolari all'asse del tubo - V_p è il potenziale di post-accelerazione - Il campo tende a far convergere il fascio sullo schermo riducendo la deflessione; le ultime due figure rappresentano due schemi che impiegano una griglia per aumentare la deflessione sagomando opportunamente le equipotenziali.

- Sullo schermo è depositato un materiale luminescente (questo termine indica la generazione luminosa di origine non termica). Si parla di **fluorescenza** : luce emessa durante l'eccitazione da parte del fascio elettronico; e di **fosforescenza** : luce emessa dopo l'eccitazione. *Nella tabella 11-1, f.19 sono indicati diversi tipi di fosfori, i colori della fluorescenza e della fosforescenza (che possono differire tra loro in uno stesso materiale) e la persistenza (nell'ordine del secondo-secondo) ossia il tempo perchè la luce scenda al 10%* *Manca in questa tabella la sensibilità del fosforo; fosfori che rispondono brevemente sono solitamente anche poco sensibili.* Gli elettroni, arrivati sullo schermo, lo caricherebbero negativamente senza il fenomeno dell'emissione secondaria. L'emissione secondaria può essere inferiore o superiore all'emissione eccitante. *(f.19, fig.17 : misura dell'emissione secondaria : emissione propria del materiale eccitato dal fascio).* La fascia conduttrice (aquadag - grafite, carbone conduttore) raccoglie gli elettroni secondari e chiude il circuito; un'altra possibilità è quella di disporre sullo schermo un sottile film di alluminio che 1) raccoglie gli elettroni, 2) riflette la radiazione emessa dal fosforo, verso l'osservatore, 3) raffredda termicamente lo schermo. Tutto ciò presuppone che l'energia abbinata agli elettroni sia tale da superare l'alluminio. *f.18 fig.11.7, vantaggio del film di alluminio : luminosità.*

Nota : deflessione magnetica. Si possono impiegare circuiti magnetici di deflessione per avere deflessioni maggiori e tubi più corti; la sensibilità è migliore ma la banda in frequenza è inferiore (20kHz).

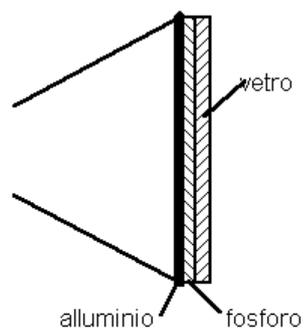


Figura 3.4:

Capitolo 4

Metodi di confronto per la misura R,L,C

4.1 Misura di resistenze : ponte di Wheatstone

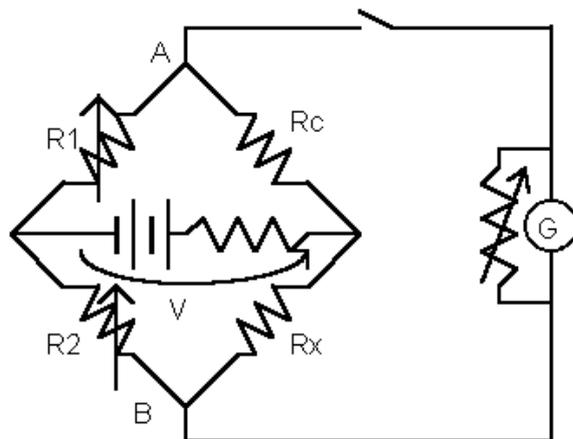


Figura 4.1: Ponte di Wheatstone

Il circuito viene alimentato su una diagonale e si osserva la tensione sull'altra diagonale. R_c è fissa, R_x ignota. Condizione di equilibrio :

$$V_{AB} = 0$$

Quando $I_G = 0$ si ha che

$$V_A - V_B = V \frac{R_c}{R_1 + R_c} - V \frac{R_x}{R_2 + R_x}$$

La condizione di equilibrio corrisponde a

$$\frac{R_c}{R_1 + R_c} = \frac{R_x}{R_2 + R_x}$$

cioè

$$R_x = \frac{R_2}{R_1} R_c$$

Valori tipici sono

- $1 \Omega < R_c < 10^4 \Omega$
- $1 \Omega < R_1, R_2 < 10^3 \Omega$
- $10^{-3} \Omega < R_x < 10^7 \Omega$ con una precisione intorno a 10^{-4}

Questa tecnica è molto accurata (più dell'ohmetro che abbiamo già incontrato). Considerazioni sulla sensibilità del sistema nelle varie condizioni di lavoro:

$$V_{AB} = V \left[\frac{R_c}{R_1 + R_c} - \frac{R_x}{R_2 + R_x} \right]$$

Variando la sola R_x :

$$\partial V_{AB} = V(-1) \frac{R_2 + R_x - R_x}{(R_2 + R_x)^2} \partial R_x = -V \frac{R_2}{(R_2 + R_x)^2} \partial R_x$$

$$\frac{\text{partial} V_{AB}}{V} = -\frac{k}{(1+k)^2} \partial R_x R_x, \text{ con } k = \frac{R_2}{R_x}$$

Data una variazione relativa su R_x vediamo come si riflette sulla tensione tra A e B che eccita il galvanometro. Viceversa, stimata la più piccola V_{ab} , sappiamo la variazione relativa su R_x . Più grande è V più piccola è l'incertezza su R_x . Il termine $\frac{k}{(1+k)^2}$ deve essere più grande possibile, per lo stesso motivo di incertezza:

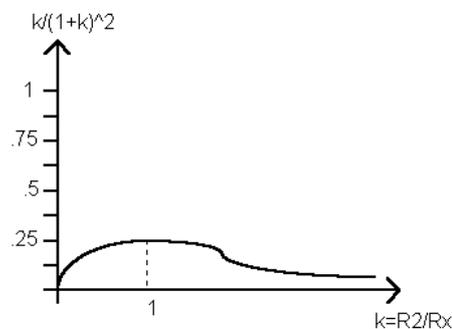


Figura 4.2: Grafico

R_2 deve essere, se possibile, dello stesso ordine di grandezza di R_x .

4.2 Misura a ponte di piccole resistenze *

La resistenza da misurare ha quattro morsetti, due amperometrici - connessi al circuito, di grosse dimensioni e in grado di assicurare un buon collegamento - ; due volmetrici - ai capi dei quali si osserva la differenza di potenziale, sono piccoli e permettono di individuare con precisione il valore della R.



Figura 4.3:

Metodo del doppio ponte :

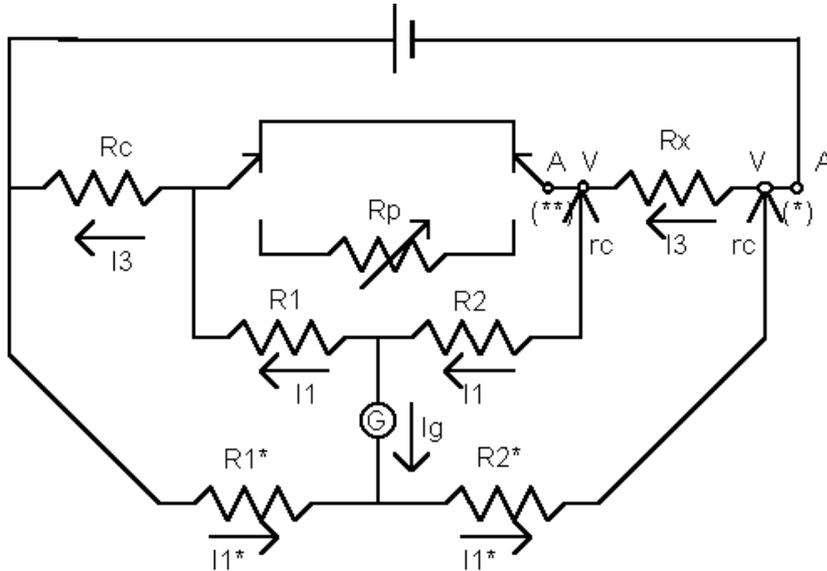


Figura 4.4: Metodo del doppio ponte (correnti per $I_g = 0$)

Siamo nella situazione di equilibrio quando la corrente indicata dal galvanometro è nulla. R_1, R_2, R_1^*, R_2^* sono in un rapporto fisso fra loro :

$$\frac{R_1}{R_1^*} = \frac{R_2}{R_2^*} = m$$

$$\begin{aligned} I_1^* R_1^* &= I_3 R_c + I_1 R_1 \\ I_1^* R_2^* &= I_3 R_x + I_1 R_2 \\ \Rightarrow \frac{I_3 R_c}{I_3 R_x} &= \frac{I_1^* R_1^* - I_1 R_1}{I_1^* R_2^* - I_1 R_2} \\ \Rightarrow \frac{R_c}{R_x} &= \frac{I_1^* R_1^* - I_1 m R_1^*}{I_1^* R_2^* - I_1 m R_2^*} = \frac{(I_1^* - I_1 m) R_1^*}{(I_1^* - I_1 m) R_2^*} = \frac{R_1}{R_2} \\ \Rightarrow R_x &= \frac{R_2 R_c}{R_1} \text{ per } I_G = 0, \quad \frac{R_1}{R_1^*} = \frac{R_2}{R_2^*} = m \end{aligned}$$

L'espressione è quella del ponte semplice.

- Le resistenze ai contatti voltmetrici, resistenze di contatto r_c , sono in serie ad R_2 e R_2^* che sono grandi, quindi le resistenze di contatto non hanno rilevanza.
- Un'eventuale resistenza su ciascun contatto amperometrico non ha influenza ai fini della misura in quanto esterna è al circuito del ponte

o non rientra nelle equazioni del ponte :

(*) è esterna al ponte

(**) non ha influenza sull'equilibrio.

Lo si verifica variando R_p (se il ponte era equilibrato, lo resta anche introducendo una caduta su R_p). Tutto ciò è vero se $\frac{R_1}{R_1^*} = \frac{R_2}{R_2^*} = m$. In questo modo misuriamo correttamente resistenze di piccolo valore. Si può verificare che, in generale, la condizione di equilibrio corrisponde a :

$$R_x = \frac{R_2 R_c}{R_1} + \frac{R_p (R_2^* R_1 - R_2 R_1^*)}{R_1^* (R_1 + R_2 + R_p)}$$

(Il secondo termine è forzato ad essere nullo con l'opportuno rapporto di resistenze del ponte).

4.3 Misure di resistenze di grande valore

(Per resistenze di grande valore si intende $> 10^{10} \Omega$).

Si osserva il transitorio di tensione ai capi della resistenza, e si risale al suo valore della costante di tempo dello scarico della capacità.

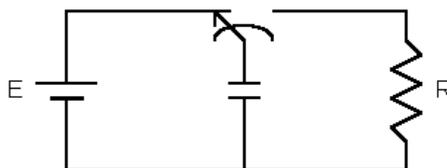


Figura 4.5:

Bisogna stare attenti alle correnti parassite sulla superficie del resistore.

Nel caso in cui la misura sia di tipo stazionario e non dinamico:

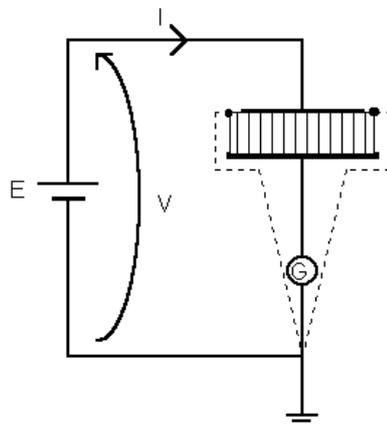


Figura 4.6: Misura di tipo stazionario

Si dispongono, a contatto del materiale (che ha elevata resistività), non dell'elettrodo, un anello di guardia che porta a massa le correnti superficiali parassite.

4.4 Misure di capacità

Lo schema a ponte può essere usato per la misura di elementi reattivi:

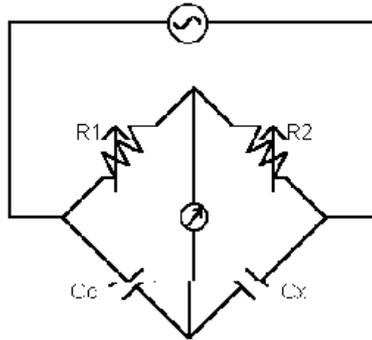


Figura 4.7: Schema a ponte per la misura di elementi reattivi

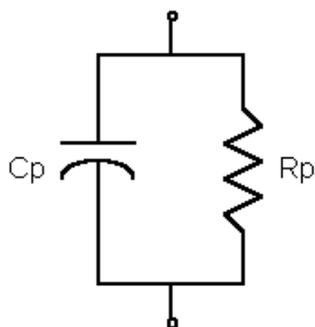
Condizione di equilibrio (stesso ragionamento sul partitore) :

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{Z_c}{Z_x} = \frac{\frac{1}{j\omega C_c}}{\frac{1}{j\omega C_x}} = \frac{C_x}{C_c}$$

$$C_x = C_c \frac{R_1}{R_2} \text{ (modellando il condensatore come pura capacità)}$$

Dovremo in realtà rappresentare diversamente il condensatore:

- Schema parallelo



Resistenza di perdita

- Schema serie

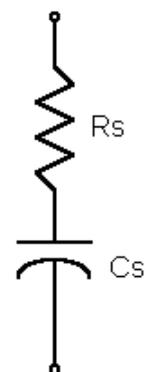


Figura 4.8: Rappresentazione del condensatore : schema serie e schema parallelo

$$C_s = C_p(1 + D^2)$$

$$R_s = R_p \left(\frac{D^2}{1 + D^2} \right)$$

D =fattore di dissipazione= $\frac{1}{\omega R_p C_p} = \omega R_s C_s$

I due schemi sono equivalenti. Schema parallelo \rightarrow usato per perdite grandi. Schema serie \rightarrow preferito in caso di piccole perdite.

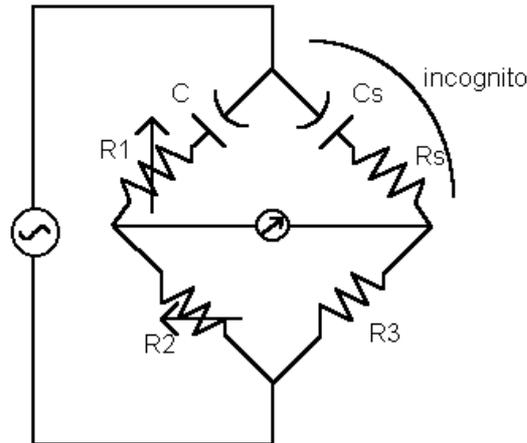


Figura 4.9:

Condizione di equilibrio :

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_s}{Z_3}$$

$$C_s = C_1 \frac{R_2}{R_3} , \quad R_s = R_1 \frac{R_3}{R_2} , \quad D = \omega R_s C_s = \omega R_1 C_1$$

em Nota : in un circuito a ponte la posizione del generatore e del galvanometro-voltmetro (in questo caso voltmetro per alternata) sono intercambiabili. $\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_c}{R_x} \iff R_1 R_c = R_2 R_x$ così come $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_s}{Z_3} \iff \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_2}{Z_3}$.

La scelta può essere fatta sulla base del maggiore trasferimento di potenza sullo strumento (per avere più segnale e maggiore sensibilità).

L'altro schema (con connessione parallelo) è il seguente :

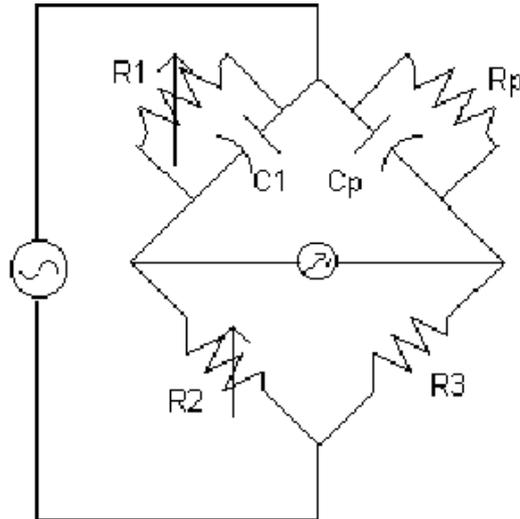


Figura 4.10: Schema con connessione parallelo

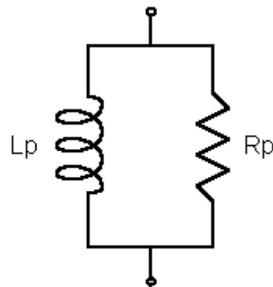
Condizione di equilibrio :

$$C_p = C_1 \frac{R_2}{R_3} , R_p = R_1 \frac{R_3}{R_2} , D = \frac{1}{\omega R_p C_p} = \frac{1}{\omega R_1 C_1}$$

4.5 Ponti per induttanze

Consideriamo anche in questo caso uno schema equivalente serie ed uno schema equivalente parallelo.

- Schema parallelo



- Schema serie

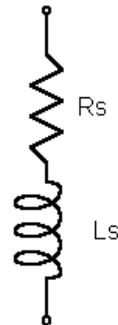


Figura 4.11: Rappresentazione dell'induttanza : schema serie e schema parallelo

Definiamo un fattore di qualità per l'induttanza (*Q-factor*):

$$Q = \frac{X_s}{R_s} = \frac{\omega L_s}{R_s} = \frac{\text{reattanza serie}}{\text{resistenza serie}}$$

Maggiore è il fattore Q migliore è l'induttore (minore resistenza serie); il fattore Q dipende dalla frequenza ed è fissato per fissata (*). Possiamo esprimere i fattori del modello parallelo in funzione di

quelli relativi al modello serie :

$$L_p = L_s \left(1 + \frac{1}{Q^2} \right) , \quad R_p = R_s (1 + Q^2)$$

(*) Nota : Induttore

Per descrivere l'oggetto induttore in un campo di frequenza sufficientemente ampio si ricorre ad uno schema più accurato, come ad esempio il seguente:

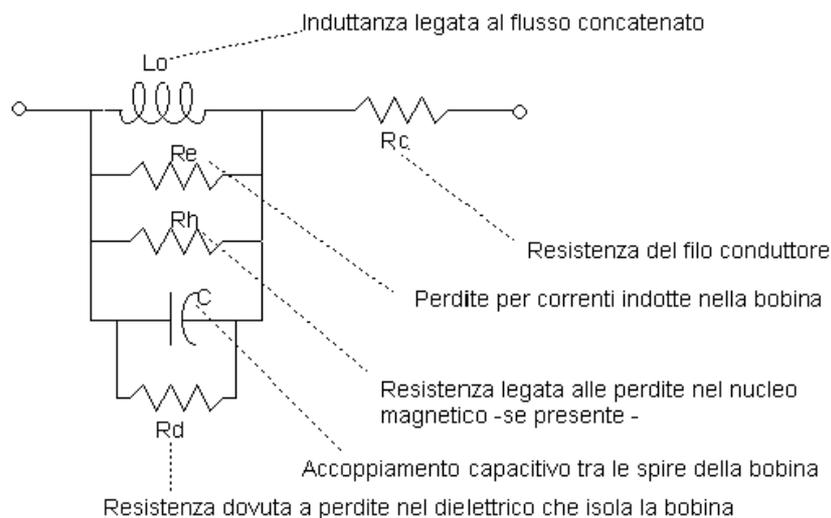


Figura 4.12: Schema più accurato dell'induttore

Queste quantità dipendono, in generale, dalla pulsazione.

Vediamo ora alcuni schemi a ponte per la misura di induttanze.

4.6 Ponti di Maxwell-Wien e di Hay

Per la misura di induttanze con fattori di qualità relativamente bassi, $Q = 1 - 10$, si utilizza il ponte di Maxwell-Wien.

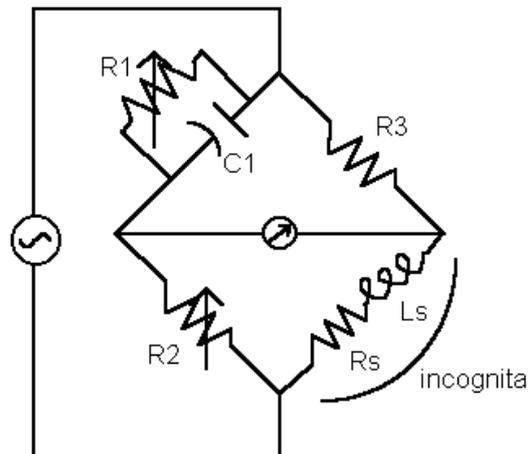


Figura 4.13: Ponte di Maxwell-Wien

Il confronto viene fatto con un condensatore perchè le sue proprietà sono caratterizzabili meglio di quelle di un induttore.

Per valori di Q che superano 10 usiamo il ponte di Hay, (per non avere resistenze R_1 o per rappresentare l'induttore mediante uno schema parallelo) :

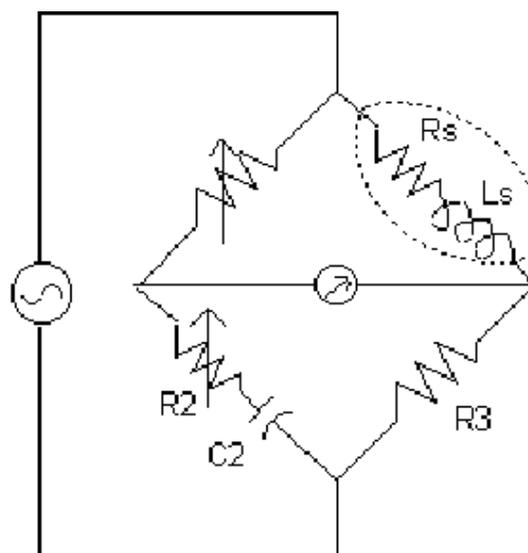


Figura 4.14: Ponte di Hay

4.7 Schema a confronto di induttori

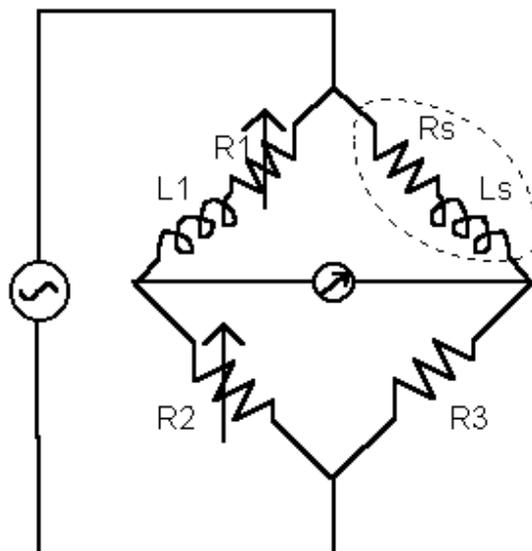


Figura 4.15: Schema a confronto di induttori

$$L_s = L_1 \frac{R_3}{R_2} \quad , \quad R_s = R_1 \frac{R_3}{R_2}$$

- Possiamo inquadrare questo discorso in uno schema che consenta una classificazione sui circuiti a ponte (v. *fotocopia 8*: è presentata una rassegna di alcuni tipi di circuiti a ponte; non sono indicati l'inserzione del volmetro e quella del generatore perchè i due strumenti possono essere scambiati).

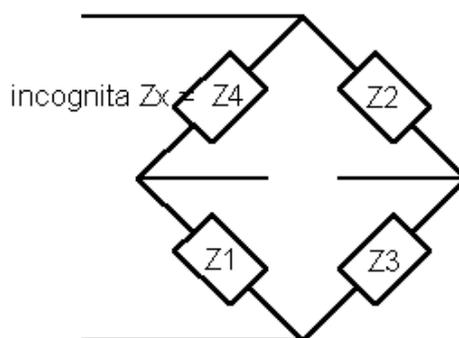


Figura 4.16:

Condizione di equilibrio :

$$\frac{Z_4}{Z_1} = \frac{Z_2}{Z_3}$$

$$Z_x = Z_1 \frac{Z_2}{Z_3} \text{ oppure } Z_1 Z_2 \frac{1}{Z_3} = Z_1 Z_2 Y_3$$

queste uguaglianze individuano diverse *interpretazioni* :

- La scrittura *diretta* $Z_x = Z_1 \frac{Z_2}{Z_3}$ suggerisce che il confronto avvenga con Z_1 e che Z_2 e Z_3 individuino solo la proporzione tra Z_x e Z_1 : confronto $Z_x - Z_1$. Manteniamo $\frac{Z_2}{Z_3}$ Reale.
- La scrittura *inversa* $Z_x = Z_1 Z_2 Y_3$, con $Z_1 Z_2$ Reale, mette in corrispondenza un'impedenza con un'ammettenza : il confronto produce una relazione così fatta :

$$R_x = (R_1 R_2) G_3$$

$$L_x = (R_1 R_2) C_3 \quad (\text{Questo accadeva nel Ponte di Maxwell, con la relazione } L_s - C_1.)$$

4.8 Rappresentazione dell'incognita nei ponti serie e parallelo

4.8.1 Circuiti ponte serie

- Uno dei due rami adiacenti al ramo incognito è una combinazione serie (*)

$$Z_x = R_x + jX_x = Z_1 \frac{Z_2}{Z_3} = (R_1 + jX_1) \frac{Z_2}{Z_3}$$

- Il ramo opposto a quello incognito è una combinazione parallela

$$R_x + jX_x = (G_3 + jB_3) Z_1 Z_2$$

4.8.2 Circuiti ponte parallelo

- Uno dei due rami adiacenti al ramo incognito è una combinazione parallela

$$Z_x = Z_1 \frac{Z_2}{Z_3} \rightarrow Y_x = Y_1 \frac{Y_2}{Y_3} \rightarrow G_x + jB_x = (G_1 + jB_1) \frac{Y_2}{Y_3}$$

- Il ramo opposto a quello incognito è una combinazione serie (**)

$$Y_x = G_x + jB_x = Y_1 \frac{Y_2}{Y_3} = Z_3 Y_1 Y_2 = (R_3 + jX_3) Y_1 Y_2$$

Utilizziamo questa classificazione per scegliere una configurazione (*) oppure (**) per l'impedenza incognita.

Un'ulteriore classificazione riguarda dove collocare gli elementi variabili (tipicamente sono due).

4.9 Posizione degli elementi variabili

(ha importanza anche per stabilire quella che è la grandezza indicata dallo strumento di misura) Gli elementi variabili possono essere (li indico con l'accento circonflesso)

1. Sullo stesso ramo, es. :

$$R_x + j\omega L_x = (\hat{G}_3 + j\omega\hat{C}_3)R_1R_2$$

Il valore degli elementi permette di variare il valore della R_x e della L_x .

2. Su rami diversi, es. :

$$R_x + j\omega L_x = (\hat{G}_3 + j\omega C_3)\hat{R}_1R_2$$

In questa situazione $L_x = C_3\hat{R}_1R_2$ e $R_x = \hat{G}_3\hat{R}_1R_2$, quindi il valore di R_x dipende da entrambi gli elementi variabili; il fattore Q è $\frac{\omega L_x}{R_x} = Q = \omega C_3\hat{R}_3$. Con questo strumento noi otteniamo direttamente l'induttanza ed il fattore Q , legate univocamente ad un solo elemento variabile. L'uscita del ponte è costituita perciò da L_x e Q , in quanto le (eventuali) manopole di regolazione possono essere indicate proprio come induttanza e fattore Q , mentre il termine R_x è ricavabile indirettamente.

3. Elemento variabile sul ramo incognito (tecnica di sostituzione), es. :

$$(R_x + j\omega L_x + R_y) = R_1R_2(G_3 + j\omega C_3)$$

$$R_x = R_1R_2G_3 - R_y \quad , \quad L_x = R_1R_2C_3$$

Quindi le uscite sono R_x e L_x .

4.10 Sorgenti di errore

Possiamo formulare la situazione di equilibrio definendo la corrente nel ramo rivelatore come una funzione dei parametri circuitali e della grandezza incognita:

$$I = f(a, b, c, \dots, x)I_0$$

dove a, b, c, \dots sono parametri, x è l'incognita, e I_0 è la corrente di alimentazione del circuito.

La condizione di equilibrio $I = 0$ è data dunque da $f(a, b, c, \dots, x) = 0$, che definisce implicitamente la $x = x(a, b, c, \dots)$.

- Sperimentalmente $|I| < I_{min}$ (sensibilità dello strumento rivelatore)

$$|f(a, b, c, \dots, x)| < \frac{I_{min}}{I_0} = \varepsilon$$

Questo comporta che, se noi espandiamo f in serie di Taylor del primo ordine,

$$f(a, b, c, \dots, x) \cong f(a, b, c, \dots, x_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x - x_0)$$

(Con x_0 tale che $f(a, b, c, \dots, x_0) = 0$)

$$\left| \Delta x \frac{\partial f}{\partial x, x_0} \right| < \varepsilon \quad |\Delta x| < \frac{\varepsilon}{\left| \frac{\partial f}{\partial x, x_0} \right|}$$

Dove ε è la sensibilità dello strumento; Δx è l'incertezza sul valore dell'impedenza incognita.

$\left| \frac{\partial f}{\partial x, x_0} \right|$ rappresenta l'influenza dell'impedenza incognita sulla corrente del rivelatore.

- Incertezze sui valori dei parametri a, b, c, \dots
- Effetti di parametri circuitali parassiti di cui non si è esplicitamente tenuto conto nelle f .

4.11 Misura di L e C con tecniche elettroniche

(Alimentiamo l'induttanza e la capacità con correnti di valore noto in funzione di una tensione di ingresso, per cui dal rapporto tra la fase del segnale e la fase dell'ingresso si risale alla grandezza incognita)

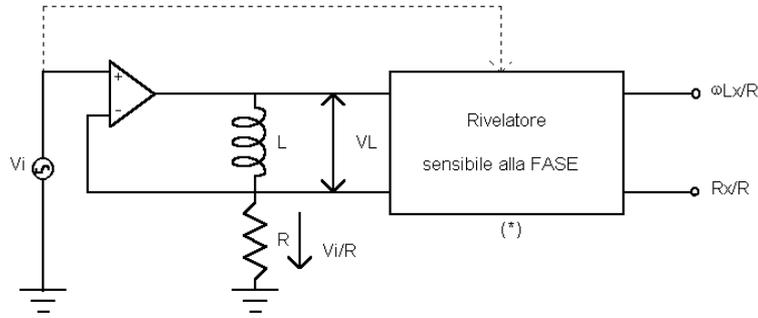


Figura 4.17: Misura di L con tecniche elettroniche

$$V_i = \frac{V_i}{R}(R_x + j\omega L_x) \quad \{Z(L) \rightarrow R_x + j\omega L_x\}$$

(*) Ci dà la componente in quadratura e in fase rispetto alla V_i ; noi misuriamo dunque la parte reattiva e quella resistiva dell'induttanza.

Con uno schema simile si può realizzare una misura di capacità:

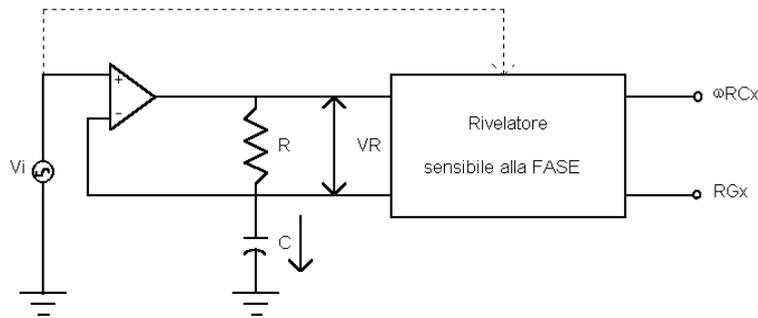


Figura 4.18: Misura di C con tecniche elettroniche

Corrente che attraversa la capacità :

$$V_i(G_x + j\omega C_x)$$

$$V_R = RI = V_i R(G_x + j\omega C_x)$$

4.12 Misure di L in alta frequenza

4.12.1 Circuiti a risonanza

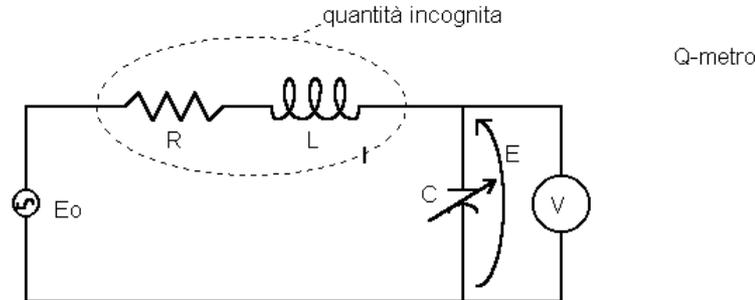


Figura 4.19: Schema a confronto di induttori

Il valore della capacità variabile viene determinato in modo da avere la massima misura sul voltmetro. La condizione di equilibrio del circuito è la **Risonanza** = valore di C per il quale V è massimo.

$$E = E_0 \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$

$$E_{max} \rightarrow \omega L = \frac{1}{\omega C} \quad L = \frac{1}{\omega^2 C}$$

$$\frac{E}{E_0} = \frac{1}{\omega RC} = \left(\frac{\omega L}{R}\right) = Q \implies \text{Fattore di qualità}$$

4.13 Metodi di ponte-*Complementi* **

4.13.1 Principio e schema fondamentale. Modi di impiego con correnti continue

Il principio del ponte fu illustrato dal Wheatstone nel 1843, ma pare che l'idea fosse già stata enunciata dal Christie fin dal 1833.

Rimanendo per ora nel campo delle correnti continue, la figura 4.20, rappresenta lo schema del classico ponte di Wheatstone, il quale può considerarsi formato da un quadrilatero di resistenze di cui le diagonali sono costituite da un galvanometro g e da una sorgente s di f.e.m. (pila o altro). Regolate le resistenze in modo che l'indicazione del galvanometro sia ridotta a zero, i punti M ed N saranno allo stesso potenziale e si potranno scrivere le relazioni:

$$V = (a + b)I_a = (c + x)I_c$$

$$aI_a = xI_c \quad bI_a = cI_c$$

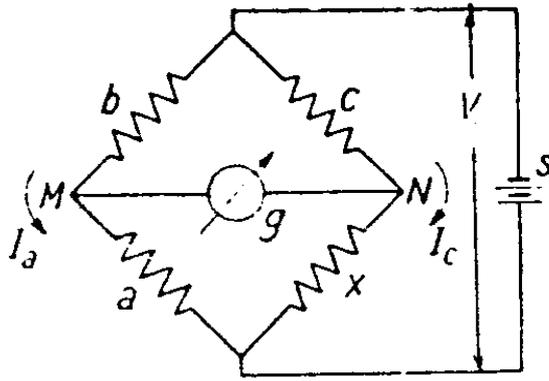


Figura 4.20: Schema di ponte

Dividendo l'una per l'altra le ultime due relazioni, si ottiene ancora $\frac{a}{b} = \frac{x}{c}$ ossia $ac = bx$ che si può enunciare dicendo: *all'equilibrio devono essere uguali i prodotti dei lati opposti del ponte*. Note pertanto tre delle quattro resistenze (per esempio a, b, c) si deduce immediatamente la quarta con la relazione:

$$x = \frac{a}{b}c$$

che, sotto tale forma, ci mostra i due modi di impiego pratico del ponte. Si può (figura 4.21) dare a c un valore intero esatto, dello stesso ordine di grandezza della incognita x e ridurre a zero il galvanometro regolando il rapporto $\frac{a}{b}$, in modo tale che i lati costituiscano una ordinaria resistenza potenziometrica. Oppure si può dare (figura 4.22) al rapporto $\frac{a}{b}$ un valore esatto e ridurre a zero il galvanometro regolando la c . È questa la disposizione più usata.

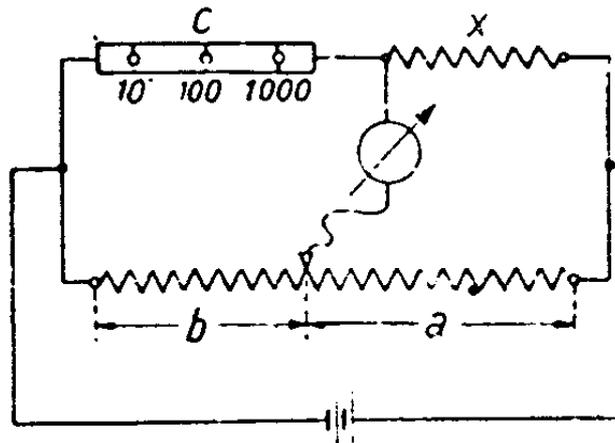


Figura 4.21: Ponte a variazione di rapporto

Vedremo più avanti per quali ragioni in pratica i limiti di impiego del ponte vadano generalmente da 1Ω a 100000Ω .

Sotto tale forma il metodo è paragonabile ad una bilancia a piatti di cui si potrà variare la lunghezza dei bracci (figura 4.23). All'equilibrio si ha infatti $ac = bx$. Per analogia i lati a e b si chiamano spesso *bracci del ponte*; mentre l'altro si chiama *lato di paragone*.

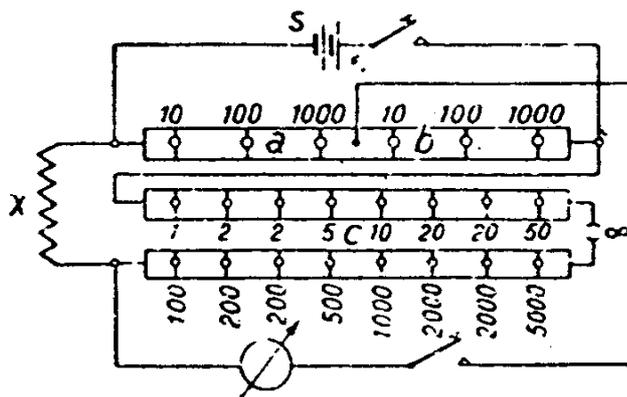


Figura 4.22: Disposizione normale di ponte

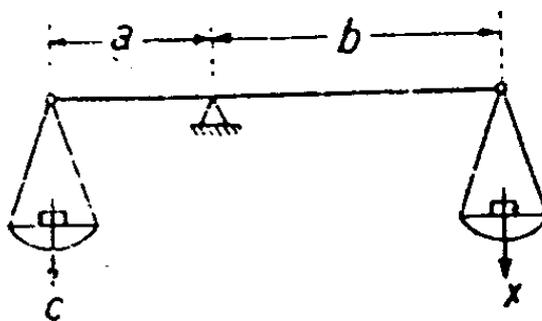


Figura 4.23: Analogo meccanico del ponte

4.13.2 Tecniche e accorgimenti di misura

Il circuito deve essere completato con un tasto (interruttore o chiave) su ciascuna delle diagonali di pila e di galvanometro. Si ha che quando la chiave di galvanometro é aperta, il galvanometro rimane a circuito aperto e quindi non é smorzato. Convienne pertanto, nelle misure, chiudere prima la chiave di galvanometro e poi quella di pila. Nei primi tentativi basta dare un colpetto alla chiave di pila per osservare il senso di deviazione del galvanometro. Quando si sono individuati due valori di c per i quali il galvanometro devia in senso contrario, si può facilmente perfezionare la misura.

Si può anche, nei primi tentativi, shuntare il galvanometro eliminando però sempre il derivatore (per ovvie ragioni di sensibilità) quando si é prossimi all'equilibrio. In generale, data la grande sensibilità del ponte (nel quale si può pensare che la corrente nulla nel galvanometro sia data dalla differenza delle due correnti I_1 e I_2 indicate in figura 4.24 con frecce piene e punteggiate), non si troverá in generale un valore esatto di c che dará lo zero. Si dovrá cioè procedere per interpolazione. Detti c e $c + l$ i due valori che comprendono lo zero, e λ_1 e λ_2 le due deviazioni, di senso contrario, lette in corrispondenza, il valore esatto di c sará dato (figura 4.25), da:

$$c = c + l \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

cosicché

$$x = \frac{a}{b} \left(c + \frac{\lambda_1 l}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)$$

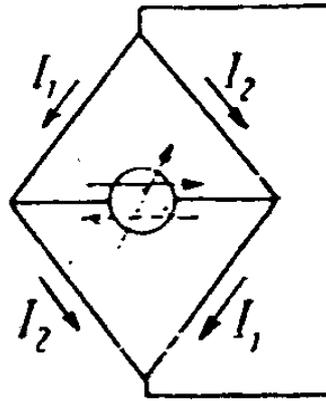


Figura 4.24: Andamento ipotetico delle correnti nel ponte

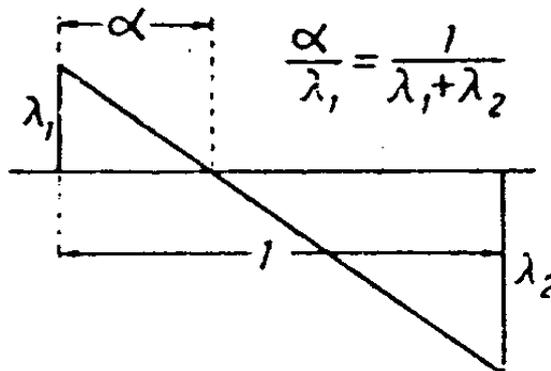


Figura 4.25: Interpolazione

Come già si è visto, l'interpolazione stessa consente di determinare sperimentalmente la sensibilità del ponte, che sarà espressa al solito da:

$$\frac{x}{dx} = \frac{\Delta\lambda}{d\lambda} \frac{c}{\Delta c} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{d\lambda} c$$

essendo generalmente $\Delta c = l$, e $d\lambda = 0.2 \div 0.5$ divisioni.

Come in tutti i metodi di zero, la sensibilità è in generale esuberante; l'errore proprio del metodo è trascurabile, cosicché la precisione con cui sono tarate le resistenze del ponte. Dalla relazione $x = \frac{a}{b}c$, nella peggiore ipotesi risulta:

$$\frac{dx}{x} = \frac{da}{a} + \frac{db}{b} + \frac{dc}{c}$$

Se tutte le resistenze in un ponte sono esatte a $1/10000$, l'errore commesso nella misura di x potrà quindi essere anche di $3/10000$.

4.13.3 Intercambiabilità dei lati opposti e delle diagonali

In un ponte all'equilibrio i lati opposti sono intercambiabili. Infatti la relazione $ac = bx$ è soddisfatta anche se cambiamo di posto la a con la c (figura 4.26, a e b) oppure la b con la x . Di più dalla relazione stessa discendono le due proporzioni $\frac{a}{b} = \frac{x}{c}$ oppure $\frac{a}{x} = \frac{b}{c}$. Come la prima ci dice che se si alimentano i vertici P, Q del ponte, i punti M ed N sono equipotenziali (figura 4.26a); così la seconda dice che, se si alimentano i vertici M, N (figura 4.26c) risultano equipotenziali i punti P e Q. Questa intercambiabilità della sorgente di f.e.m. col galvanometro ha però delle limitazioni pratiche per intuitive considerazioni di sensibilità.

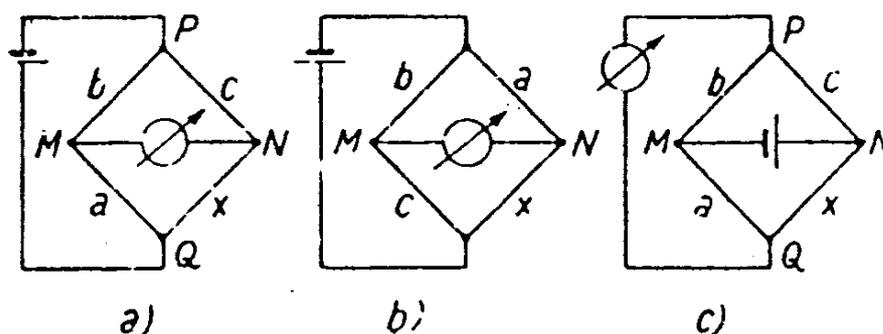


Figura 4.26: Intercambiabilità dei lati

Si può infatti accettare come evidente che la sensibilità di regolazione aumenta con la quota di tensione applicata al lato x di misura. Tuttavia, poiché è il rapporto $\frac{a}{b} = \frac{c}{x} = y$ che si deve individuare, è anche evidente che l'approssimazione con cui esso può determinarsi è massima quando $a = b$. Infatti

$$\frac{dy}{y} = \frac{da}{a} + \frac{db}{b}$$

e, potendosi ritenere uguali gli errori assoluti da e db , come lo sono di fatto nel caso di una resistenza potenziometrica, avremo

$$\frac{dy}{y} = \frac{a+b}{ab} da$$

che, per $a+b$ costante, è minimo per $a = b$. Pertanto il galvanometro deve essere derivato, per quanto è possibile, in vicinanza del punto di mezzo di $a+b$ e di $c+x$. Per conseguenza, quando due lati del ponte, per es. a e x siano piccoli relativamente agli altri due, lo schema a) della figura 4.27 non è consigliabile, perché i punti M ed N si trovano elettricamente vicini al punto Q. Si dovrà in tal caso usare solo lo schema b).

Spesso si rendono intercambiabili, mediante un commutatore a spine, i bracci a e b (figura 4.28) in modo da poterli confrontare. In tal caso, eseguendo due volte una misura con $a = b$ e scambiandoli di posto, si realizza lo stesso controllo che si ha nelle bilance, con la *doppia pesata*. Si eliminano così gli errori dovuti alla imprecisione costruttiva dei lati a e b . Ancora più utile è la possibilità, di cui molti ponti sono dotati, di poter rapidamente scambiare di posto pila e galvanometro, in relazione alle considerazioni sopra accennate e sulle quali ritorneremo più ampiamente parlando della sensibilità del ponte.

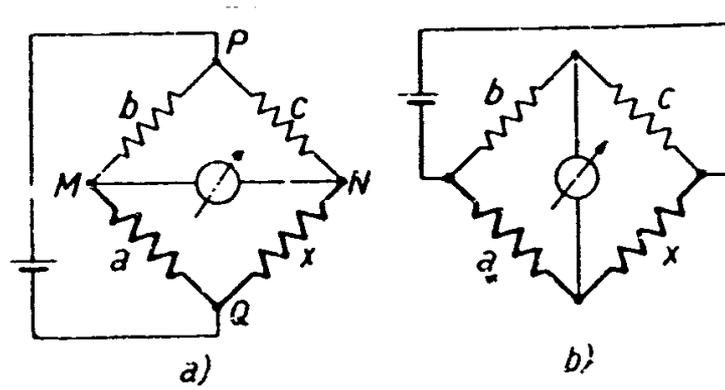


Figura 4.27: Criterio per la scelta della diagonale di pila

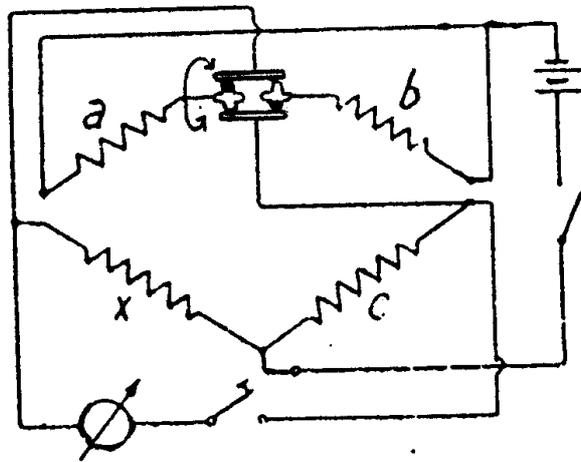


Figura 4.28: Schema per l'intercambiabilità dei bracci

4.13.4 Teoria generale del ponte

Data l'importanza dei metodi di ponte, conviene vederne un pó piú a fondo la teoria, che da gran tempo é stata sviluppata in tutti i suoi particolari.

La teoria generale del ponte suppone che in ciascuno dei sei lati di resistenza a, b, c, x, g ed s vi sia una f.e.m. . Dati i valori delle sei resistenze si tratta di trovare il valore delle sei correnti nei sei lati.

Applicando i principi di Kirchoff, si possono scrivere facilmente sei equazioni indipendenti: tre fra le correnti ai nodi (i nodi sono quattro, quindi solo tre equazioni ai nodi sono indipendenti) e tre del tipo $\Sigma ri = \Sigma e$.

Si giunge cosí alle equazioni risolutive, che danno i valori delle correnti nei sei lati, ed hanno tutte al denominatore un determinante di sesto ordine.

Si può oggi semplificare notevolmente il problema di due ordini di considerazioni. In primo luogo, salvo singolarissime eccezioni, nei metodi di ponte oggi in uso si adopera solo una f.e.m. in una delle diagonali. In secondo luogo, per l'alimentazione del ponte non si ricorre piú, come in addietro, a

pile di resistenza interna piuttosto elevata, ma a piccole batterie di accumulatori, la cui resistenza é praticamente trascurabile rispetto alle altre resistenze in gioco, cosicché si può senza errore supporre che il ponte sia alimentato a tensione V costante. Con tali ipotesi il problema si riduce a trovare il valore della corrente I_g che la tensione V manda nella diagonale di galvanometro.

Al risultato si giunge facilmente applicando il teorema di Thevenin al circuito di figura 4.20 ove si supponga $s = 0$.

Si arriva così al circuito equivalente avente una resistenza complessiva:

$$r + \frac{ab}{a+b} + \frac{cx}{c+x}$$

nel quale agiscono in opposizione le due f.e.m.

$$E_0 = V \frac{a}{a+b} \quad E_1 = V \frac{x}{c+x}$$

La corrente I_g nel galvanometro sarà pertanto:

$$I_g = \frac{E_0 - E_1}{r + s_0 + s_1} = \frac{V_0 \frac{a}{a+b} - V_1 \frac{x}{c+x}}{r + \frac{ab}{a+b} + \frac{cx}{c+x}} = V \frac{a(c+x) - x(a+b)}{(a+b)(c+x)(r + \frac{ab}{a+b} + \frac{cx}{c+x})} = V \frac{ac - bx}{D_v}$$

a conferma che, per annullare la I_g deve essere $ac = bx$.

Quanto al denominatore D_v , si noti in primo luogo che esso risulta formato da una somma di prodotti ternari di resistenze, come é necessario per l'omogeneità della formula che dá la I_g . Il numeratore contiene infatti quadrati (prodotti binari) di resistenze: se il denominatore non fosse omogeneo con un cubo di resistenze (prodotto ternario) il coefficiente di V non risulterebbe, come é necessario, l'inverso di una resistenza.

In secondo luogo si noti che $\frac{ab}{a+b} + \frac{cx}{c+x}$ non é altro che la *resistenza esterna* al galvanometro, nell'ipotesi fatta che sia nulla la resistenza fra A e B e fra C e D. Il circuito può in tal caso disegnarsi come in figura 4.29 da cui si deduce immediatamente il valore sopra scritto per la resistenza esterna al galvanometro che indicheremo con:

$$R_{go} = \frac{ab}{a+b} + \frac{cx}{c+x}$$

Con ciò risulta $D_v = (a+b)(c+x)(r + R_{go})$ che, moltiplicato e diviso per la somma $a+b+c+x = S$ dei quattro lati diventa:

$$D_v = (a+b+c+x) \frac{(a+b)(c+x)}{a+b+c+x} (r + R_{go})$$

Ma

$$\frac{(a+b)(c+x)}{a+b+c+x}$$

é la resistenza del ponte, fra i morsetti di alimentazione, nelle condizioni di equilibrio. Quando infatti il galvanometro non sia piú percorso da nessuna corrente, il suo circuito può essere interrotto ($r = \infty$)

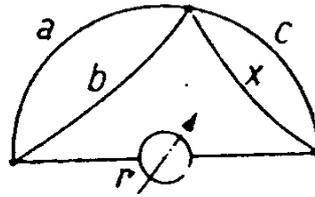


Figura 4.29: Schema equivalente per la deduzione della resistenza esterna al galvanometro

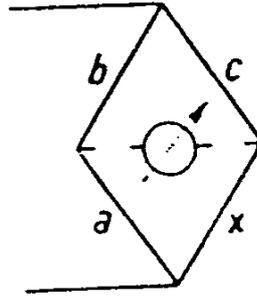


Figura 4.30: Schema di ponte in equilibrio

senza modificare nulla nel regime del circuito, che si riduce allo schema di figura 4.30 e che presenta fra i punti di alimentazione una resistenza:

$$R_{p\infty} = \frac{(a+b)(c+x)}{a+b+c+x}$$

Con ciò possiamo scrivere $D_v = SR_{p\infty}(r + R_{go})$ espressione facile da ricordare in quanto ognuno dei suoi quattro termini ha un significato fisico ben preciso e cioè:

$$S = a + b + c + x$$

é la somma delle resistenze dei quattro lati;

$$R_{p\infty} = \frac{(a+b)(c+x)}{S}$$

é la resistenza del ponte fra i morsetti di alimentazione all'equilibrio, ossia per $r = \infty$;

$$R_{go} = \frac{ab}{a+b} + \frac{cx}{c+x}$$

é la resistenza esterna al galvanometro, supposta nulla la resistenza interna del circuito di alimentazione del ponte;

r

é la resistenza propria del galvanometro.

Giunti a questo punto, é immediato il passaggio alla considerazione del caso piú generale in cui non si possa piú considerare costante la V , ma ci si debba riferire alla f.e.m. E della sorgente, tenendo conto della resistenza interna di questa. All'equilibrio infatti, la corrente assorbita complessivamente dal ponte sará $I = \frac{V}{R_{p\infty}}$ cosicché la relazione fra la E e la V sará espressa da:

$$E = V + sI = V + V \frac{s}{R_{p\infty}} = V \left(1 + \frac{s}{R_{p\infty}} \right)$$

Basterá quindi nell'espressione che dá la I_g nel galvanometro sostituire a V il suo valore $\frac{E}{1 + \frac{s}{R_{p\infty}}}$ e si otterrá :

$$I_g = \frac{E}{1 + \frac{s}{R_{p\infty}}} \frac{ac - bx}{D_V} = E \frac{ac - bx}{D_E}$$

ponendo: $D_E = D_V(1 + \frac{s}{R_{p\infty}})$ ossia $D_E = S(s + R_{p\infty})(r + R_{g0})$.

Il denominatore della I_g nel caso piú generale é quindi dato dal prodotto di $S = a + b + c + x$, per la resistenza all'equilibrio del circuito di pila ($s + R_{p\infty}$) e per la resistenza del circuito di galvanometro ($r + R_{g0}$) quando sia $s = 0$.

Il riferirsi sempre e solo alle condizioni di equilibrio del ponte, é perfettamente lecito se si pensa che, anche durante le operazioni di interpolazione, la corrente nel galvanometro é generalmente *una frazione di microampere* ed é quindi trascurabile rispetto alle correnti in gioco nel ponte che sono generalmente dell'ordine almeno dei milliampere.

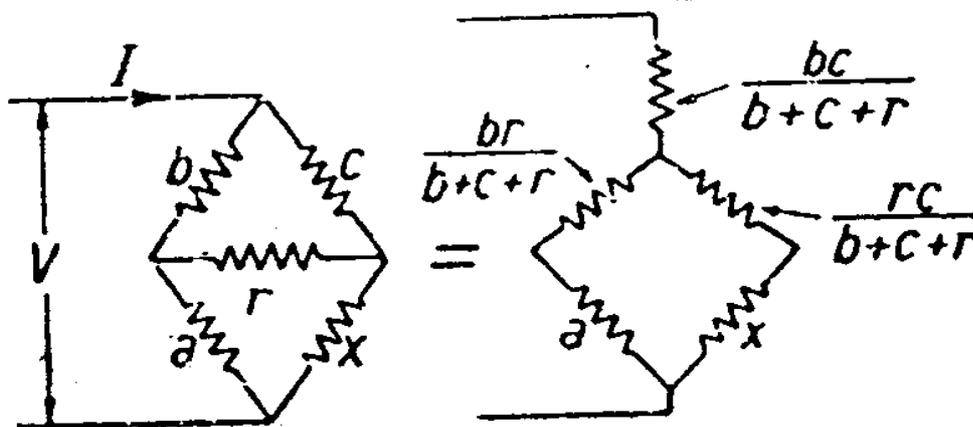


Figura 4.31:

Il valore esatto della resistenza complessiva R_p fra i morsetti di alimentazione del ponte quando si sia lontani dalla condizione di equilibrio e per r finito, si puó ottenere facilmente sostituendo (figura 4.31) alla maglia triangolare b, c, r , una stella equivalente i cui raggi hanno come é noto, i valori indicati in figura. Risulta con ciò intuitivamente:

$$R_p = \frac{V}{I} = \frac{(\frac{rc}{b+c+r} + x)(\frac{br}{b+c+r} + a)}{a + x + \frac{r(c+b)}{b+c+r}}$$

che si puó scrivere:

$$R_p = \frac{(a+b)(c+x)r + \frac{ab}{a+b} + \frac{cx}{c+x}}{a+b+c+x} \frac{r + \frac{(c+b)(a+x)}{a+b+c+x}}$$

L'ultimo termine al denominatore non é altro che la resistenza esterna al galvanometro, quando fosse $s = \infty$, con il quale il galvanometro rimane chiuso su un doppio arco formato dalle due resistenze $c + b$ e $a + x$. Posto pertanto $R_{g\infty} = \frac{(c+b)(a+x)}{a+b+c+x}$ si puó scrivere, ricordando le precedenti posizioni, $R_p = R_{p\infty} \frac{r+R_{g0}}{r+R_{g\infty}}$. Nelle condizioni di equilibrio del ponte risulta $\frac{a}{b} = \frac{x}{c} = \rho$, ossia $a = b\rho$ e $x = c\rho$.

Sostituendo nelle espressioni di R_{go} e di $R_{g\infty}$, si ottiene:

$$R_{go} = \frac{\rho b^2}{(\rho + 1)b} + \frac{\rho c^2}{(\rho + 1)c} = \frac{\rho}{\rho + 1}(c + b)$$

$$R_{g\infty} = \frac{(c + b)\rho(c + b)}{(\rho + 1)b + (\rho + 1)c} = \frac{\rho}{\rho + 1}(c + b)$$

Risulta pertanto, all'equilibrio, $R_{go} = R_{g\infty}$ e quindi $R_p = R_{p\infty}$ come deve essere.

Il calcolo della resistenza esterna al galvanometro R_g , nel caso generale di ponte squilibrato si può fare con lo stesso procedimento seguito per il calcolo della R_p , sostituendo una stella equivalente al triangolo a, b, s , oppure sostituendo nella formula di R_p , s ad r , a a c e viceversa. Risulta:

$$R_g = \frac{ab}{a + b + s} + \frac{(\frac{as}{a+s+b} + x)(\frac{bs}{a+b+s} + c)}{c + x + s\frac{a+b}{a+b+s}} = \frac{(c + b)(a + x)}{S} \frac{s + \frac{bc}{b+c} + \frac{ax}{a+x}}{s + \frac{(a+b)(c+x)}{S}} = R_{g\infty} \frac{s + R_{po}}{s + R_{p\infty}}$$

Ma, all'equilibrio, si è visto essere $R_{po} = R_{p\infty}$. Risulterà quindi sempre all'equilibrio:

$$R_g = R_{g\infty} = \frac{\rho}{\rho + 1}(c + b)R_{go}$$

ossia, nelle condizioni di equilibrio del ponte, la resistenza esterna ad una delle diagonali può calcolarsi ponendo l'altra diagonale indifferentemente uguale a zero o ad infinito. In ogni caso risulta:

$$R_{go} = R_{g\infty} = \frac{ab}{a + b} + \frac{cx}{c + x} = \frac{\rho}{\rho + 1}(b + c)$$

$$R_{po} = R_{p\infty} = \frac{cb}{c + b} + \frac{ax}{a + x} = (\rho + 1)\frac{bc}{b + c}$$

donde la relazione importante

$$R_{go}R_{po} = \rho bc$$

4.13.5 Sensibilità del metodo a ponte

Analiticamente, per determinare la sensibilità del ponte si può procedere con un metodo generale, valevole per tutti i metodi di zero considerando che se, all'equilibrio, quando

$$I_g = E \frac{ac - bx}{D_E} = 0$$

si dá un piccolo incremento dx alla x , si avrà nel galvanometro una:

$$dI_g = -E \frac{bdx}{D_E} = \frac{d\lambda}{K_a}$$

potendosi ritenere che il denominatore, che pure contiene la x come fattore di solo alcuni dei suoi termini, non muti sensibilmente di valore per la variazione infinitesima dx . Se quindi indichiamo con $d\lambda$ la più piccola deviazione che si è in grado di osservare, la più piccola dx che noi potremo apprezzare sarà data da:

$$dx = \frac{d\lambda D_E}{K_a E b}$$

(si trascura il segno, non importando il segno della deviazione). Pertanto la sensibilità del metodo sarà espressa dall'inverso dell'errore relativo:

$$\frac{dx}{x} = \frac{d\lambda D_E}{K_a E b x}$$

Tale valore coincide naturalmente con quello determinabile sperimentalmente espresso da:

$$\frac{dx}{x} = \frac{d\lambda \Delta c}{(\lambda_1 + \lambda_2)c}$$

Come si vede, e come é naturale in tutti i metodi di zero, la sensibilità aumenta con l'aumentare della sensibilità del galvanometro (K_a) e della tensione applicata. Quanto all'influenza del fattore D_E/bx che dipende dal proporzionamento delle varie resistenze che costituiscono il ponte, conviene ancora riferirsi alle condizioni di equilibrio $\frac{a}{b} = \frac{x}{c} = \rho$. Sostituendo ρb ad a e ρc a x nella espressione di D_E , essa assume la forma:

$$D_E = (\rho + 1)(b + c)\left[r + \frac{\rho}{\rho + 1}(b + c)\right]\left[s + (\rho + 1)\frac{bc}{b + c}\right]$$

E quindi

$$\frac{D_E}{bx} = \frac{D_E}{\rho bc} = \frac{(\rho + 1)(b + c)}{\rho bc}\left[r + \frac{\rho}{\rho + 1}(b + c)\right]\left[s + (\rho + 1)\frac{bc}{b + c}\right]$$

Volendo mettere in evidenza l'incognita x , basta porre $c = \frac{x}{\rho}$ con il quale si ottiene:

$$\frac{D_E}{bx} = \frac{(\rho + 1)(\rho b + x)}{\rho b x}\left[r + \frac{\rho b + x}{\rho + 1}\right]\left[s + (\rho + 1)\frac{bx}{\rho b + x}\right]$$

Molte considerazioni sono state sviluppate su questa espressione. In primo luogo si può osservare che per la migliore utilizzazione della sorgente di f.e.m. e del galvanometro dovrebbero le loro resistenze interne essere uguali alle resistenze del circuito esterno a cui essi sono collegati, ossia dovrebbe essere $r = \frac{\rho b + x}{\rho + 1}$.

D'altra parte é intuitivo che la maggiore sensibilità si verifica quando $a = b$ e $c = x$, ossia per $\rho = 1$, nel qual caso dovrebbe essere: $r = \frac{b+x}{2}$ e $s = 2\frac{bx}{b+x}$; e poiché $\frac{bx}{b+x}$ é minimo per $b = x$, si conclude che la massima sensibilità teorica si raggiungerebbe in un ponte in cui fossero tutti i lati uguali, cioè $a = b = c = x = r = s$.

Si arriva in tal caso a $D_E = 16r^3$ ed a $\frac{D_E}{bx} = 16r$. Dal che risulterebbe ancora la convenienza a ridurre r ossia la resistenza di tutti i lati, pur tenendo conto che al diminuire di r , per un galvanometro di data costante intrinseca C , diminuisce la sua sensibilità amperometrica $K_a \simeq C\sqrt{r}$. All'atto pratico, evidentemente, le condizioni saranno sempre molto diverse. Sarà in generale $s < r$ ma, poiché dovrebbe essere:

$$sr = \frac{\rho b + x}{\rho + 1}(\rho + 1)\frac{bx}{\rho b + x} = bx = ac$$

data la convenienza teorica di avere $b = x$, risulterà in definitiva $sr = b^2$ ossia $b = \sqrt{sr}$. Donde la condizione di massima sensibilità:

$$a = b = c = x = \sqrt{sr}$$

Meglio di ogni possibile considerazione teorica vale la rappresentazione grafica. In figura 4.32 sono tracciate, in scala logaritmica, le curve che mostrano come vari la sensibilità:

$$\frac{x}{dx} = \frac{K_a E b x}{d\lambda D_E}$$

al variare della x per diversi valori di $\rho = a/b$ per un caso medio normale, ossia per $r = 500\Omega$, $s = 20\Omega$, $b = 100\Omega$, $K_a = 10^8 \text{ mm}/\mu\text{A}$, $E = 4\text{V}$, $d\lambda = 0,4$.

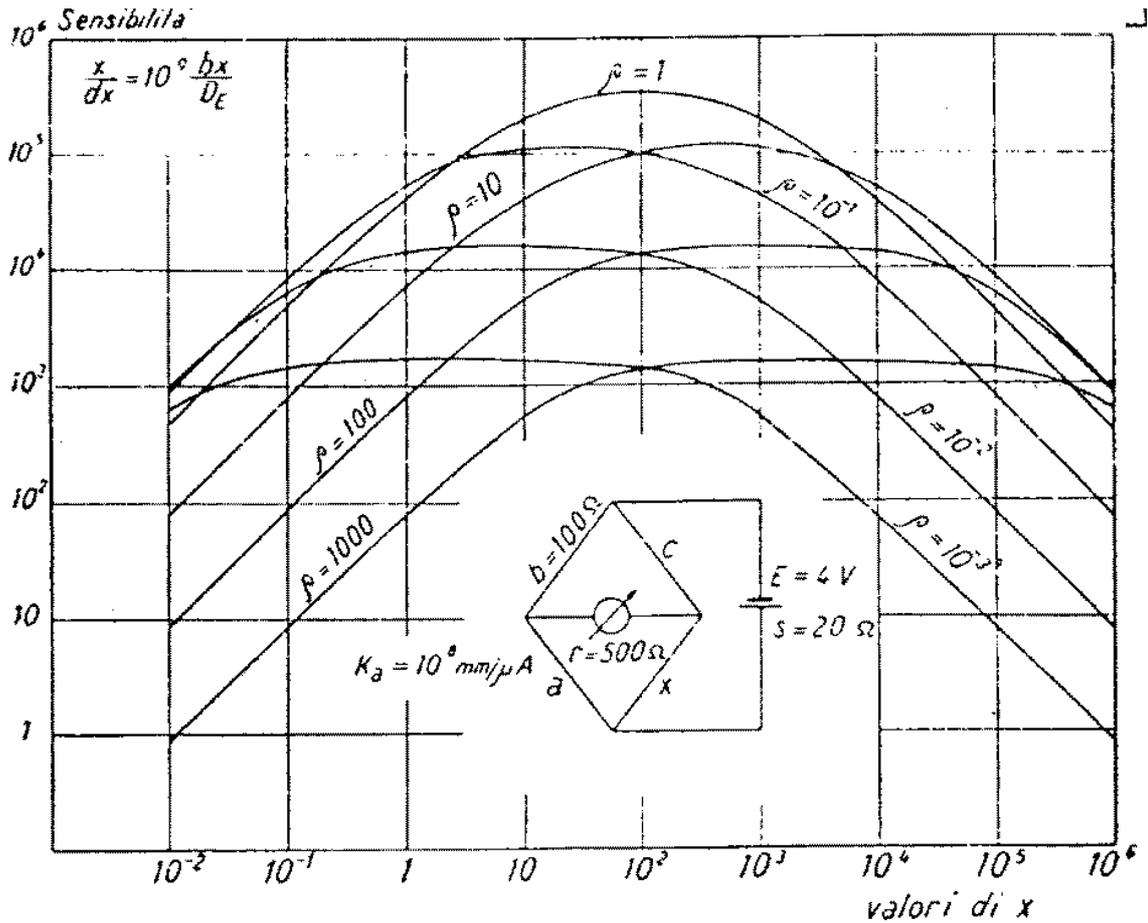


Figura 4.32: Curva di sensibilità del ponte

Come si vede, la sensibilità raggiunge in tal caso il suo valore massimo di circa 500000 per $a = b = c = x = 100$ e va decrescendo da una parte e dall'altra quanto più ci si allontana da tale condizione. Si vede anche come al diminuire di x convenga diminuire ρ ed aumentarlo quando x aumenta; condizione questa in pieno accordo con le necessità pratiche della misura. Ma comunque, anche scegliendo il rapporto ρ più opportuno, per $x \leq 0.1\Omega$ o per $x \geq 100000\Omega$, la sensibilità, nel caso considerato non è più che di 10000; dal che risultano i limiti pratici già ricordati, per l'impiego del ponte.

Da quanto precede si possono dedurre, riassumendo, le seguenti regole pratiche per il corretto uso del ponte. Coi ponti (poco usati) nei quali i lati a e b costituiscono una resistenza potenziometrica e la misura si fa variando il rapporto $\rho = a/b$, si deve sempre collegare la sorgente ai vertici ax e bc e fare c prossimo a x in modo che ρ risulti quanto più si possa vicino all'unità.

Coi ponti ordinari, si deve fare il rapporto a/b piccolo, medio o grande a seconda che x sia piccolo, medio o grande, ed inserire la pila in modo che essa alimenti in serie i due lati di minor resistenza. In pratica conviene poi scegliere il rapporto in modo da ridurre l'importanza dell'interpolazione. Quando ciò accada, quando cioè si trovi un valore esatto di c per cui il galvanometro rimane a zero, è consigliabile verificare sempre la sensibilità, dando a c una variazione Δc e osservando il $\Delta \lambda$ corrispondente.

Potrebbe infatti accadere che, per l'eccessiva riduzione del rapporto ρ , il ponte fosse in cattive condizioni di sensibilità.

Converrà infine, talvolta, controllare con l'espressione teorica di $\frac{dx}{x}$ il valore della sensibilità determinato sperimentalmente.

Un notevole divario fra i due valori sarebbe indizio di qualche anormalità del ponte: resistenza delle diagonali notevolmente maggiore di quanto supposto, od altro.

4.13.6 Ponti a deviazione

Nell'industria, quando per esempio occorra determinare rapidamente la resistenza di un gran numero di resistori, che dovrebbero essere tutti praticamente uguali entro determinati limiti di tolleranza, si usano spesso ponti a deviazione nei quali i lati a , b , c sono costituiti da tre resistenze aventi il valore che dovrebbero avere i resistori in prova, i quali con opportuni dispositivi possono essere sostituiti l'uno all'altro, sul lato x . Al posto del galvanometro si trova un milliamperometro del tipo elettromagnetico a bobina mobile, con scala a zero centrale, il quale pertanto indica la corrente che lo percorre ossia (figura 4.22):

$$I_g = V \frac{ac - bx}{(a+b)(c+x)\left(r + \frac{ab}{a+b} + \frac{cx}{c+x}\right)}$$

che per $a = b = c$ diventa:

$$I_g = V \frac{a - x}{2(a+x)\left(r + \frac{a}{2} + \frac{ax}{a+x}\right)}$$

Pertanto, se $x = a$ come dovrebbe essere, l'indice rimarrà sullo zero. In caso contrario devierà a destra o a sinistra a seconda che x sia minore o maggiore di a . E se le differenze presunte nelle varie x sono limitate a qualche per cento, si può ritenere che il denominatore sia costante, e scrivere:

$$\lambda = I_g = V(a - x) = V\Delta$$

talché, se V è mantenuto praticamente costante, la scala dello strumento può essere graduata direttamente in Δ . Con ciò si legge direttamente sulla scala dello strumento lo scarto Δ del valore x effettivo della resistenza da quello a che essa dovrebbe avere.

4.13.7 Doppio ponte di Thomson (Lord Kelvin)

Altro cospicuo esempio di ponte a più di quattro lati è il doppio ponte di Lord Kelvin, particolarmente adatto, come meglio si vedrà alla misura di piccole o piccolissime impedenze o resistenze, a seconda che lo si usi con corrente alternata o continua.

In figura 4.33, che considera un doppio ponte per corrente continua, si suppone di dover misurare una resistenza R_x che, messa in serie con una resistenza nota R_c , dello stesso ordine di grandezza,

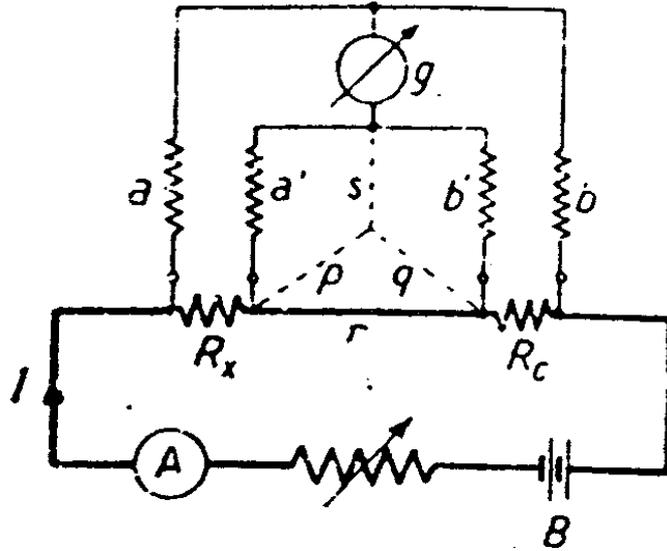


Figura 4.33: Doppio ponte di Thompson

viene fatta percorrere dalla corrente I data dalla batteria B e controllata da un amperometro A . Costruttivamente i quattro resistori regolabili a , a' , b e b' sono fatti in modo che si possa sempre fare $a = a'$ e $b = b'$.

All'uso di solito i lati a e a' sono costituiti per esempio ciascuno da tre resistori a spine che possono avere i valori 1,10 e 100Ω , mentre i lati b e b' sono costituiti da complessi di decadi a comandi collegati in modo che, automaticamente, durante le manovre, risulti sempre $b = b'$.

Lo schema si riduce immediatamente a quello di ponte ordinario a quattro lati sostituendo al triangolo formato da a' , b' e dalla connessione r che collega R_c con R_x , una stella equivalente p , q , s in cui

$$p = \frac{a'r}{S}$$

$$q = \frac{b'r}{S}$$

$$s = \frac{a'b'}{S}$$

dove

$$S = a' + b' + r$$

é la somma delle tre resistenze del triangolo primitivo. Si ottiene così un ponte ordinario i cui lati sono a , b , $R_c + q$, $R_x + p$ per il quale il galvanometro sarà ridotto a zero quando

$$(R_x + p)b = (R_c + q)a$$

donde, sostituendo a p e q i loro valori,

$$(R_x + \frac{a'r}{S})b = (R_c + \frac{b'r}{S})a$$

da cui

$$R_x = \frac{a}{b}R_c + \frac{r}{S}(\frac{b'a}{b} - a') \quad (4.1)$$

Ma se, come detto $a = a'$ e $b = b'$ il secondo termine del secondo membro si annulla e risulta $R_x = R_c \frac{a}{b}$.

Si arriva cosí alla formula stessa del ponte ordinario, del quale il doppio ponte conserva l'elevata sensibilità, mentre la misura é del tutto indipendente dalle eventuali variazioni della corrente I . Il valore di tale corrente deve essere scelto, per ovvie ragioni di sensibilità, il piú elevato possibile, compatibilmente con la necessitá di limitare l'errore di temperatura dovuto al riscaldamento delle R_c ed R_x . Sulla questione si tornerá nel seguito.

La formula completa 4.1 é interessante perché mostra quale puó essere l'errore sistematico del metodo nel caso che la condizione $a = a'$ e $b = b'$ non sia rigorosamente rispettata. Si vede infatti che tale errore sará sempre assai piccolo, dato il termine $(\frac{b'a}{b} - a')$ giá piccolo di per se stesso, viene moltiplicato per $r/S = \frac{r}{a'+b'+r}$ sempre molto minore dell'unitá dato che la connessione r sará sempre di piccola resistenza relativamente ai termini a' e b' .

Che la sensibilità aumenti con l'aumentare della I appare evidente se si considera che, in sostanza, il metodo confronta le d.d.p. agli estremi delle R_x e R_c le quali tendono a inviare nel galvanometro due correnti di senso opposto.

Quanto al nome di doppio ponte dato dal Thompson al suo metodo, esso deriva dalla considerazione che, lungo la connessione r (figura 4.34) vi sará sempre un punto P allo stesso potenziale del punto N , cosicché un secondo galvanometro derivato fra N e P sarebbe anch'esso ridotto a zero.

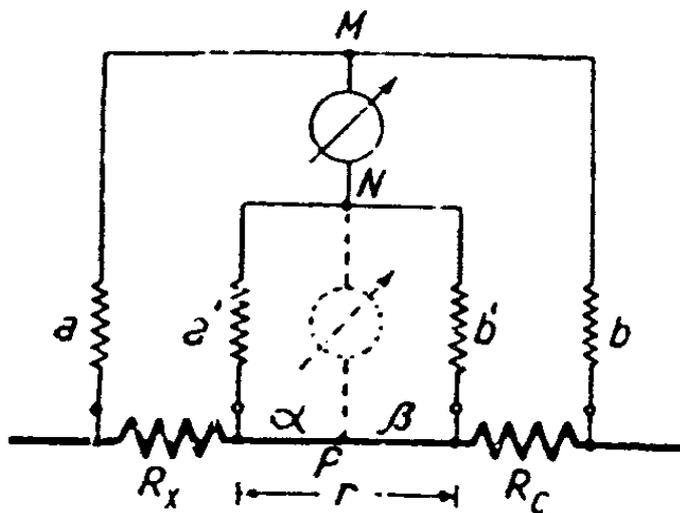


Figura 4.34: Genesi del nome del doppio ponte

Si possono poi considerare contemporaneamente due ponti: uno costituito dai lati a' , b' , α e β (essendo α e β le due parti in cui la r viene divisa dal punto P) per il quale sará:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{a'}{b'} = \rho$$

L'altro ponte é invece formato dalla a , b , $R_c + \frac{\beta b'}{\beta + b'}$ e $R_x + \frac{\alpha a'}{\alpha + a'}$, dato che, essendo equipotenziali i punti N e P , é come se fossero coincidenti, con il quale la a' risulta in parallelo con la α e la b' con la

β . La condizione di equilibrio del secondo ponte si scrive:

$$(R_C + \frac{\beta b'}{\beta + b'})a = (R_X + \frac{\alpha a'}{\alpha + a'})b$$

da cui, ponendo

$$a = \rho\beta$$

e

$$a' = \rho b'$$

si ricava:

$$R_x = \frac{a}{b}R_c + \frac{\beta}{\beta + b'}(\frac{ab'}{b} - a')$$

relazione che coincide con la formula 4.2, dato che per la proporzionalità $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{a'}{b'}$, risulta

$$\frac{\beta}{\beta + b'} = \frac{\alpha + \beta}{\beta + b' + \alpha + a'} = \frac{r}{a' + b' + r} = \frac{r}{S}$$

Ovvia é la possibilità di usare il doppio ponte anche con corrente alternata: basta considerare tutte le relazioni sopra scritte come relazioni vettoriali fra le impedenze dei vari lati anziché come relazioni algebriche fra le loro resistenze. La condizione di equilibrio vettoriale

$$Z_x Z_b = Z_c Z_a$$

si scinderá al solito in una doppia condizione algebrica. In particolare essa può essere soddisfatta quando Z_x e Z_c siano impedenze simili; nel qual caso:

$$\frac{R_x}{R_c} = \frac{X_x}{X_c} = \frac{a}{b}$$

come per il ponte. Si dovrà pertanto anche qui regolare qualche altro elemento, oltre che il rapporto a/b , per poter realizzare la condizione di zero. Come caso particolare piú importante, quando $Z_c = R_c$ sia una piccola resistenza non induttiva, e Z_x una piccola impedenza, si potrà (figura 4.35) ricorrere a due capacità regolabili.

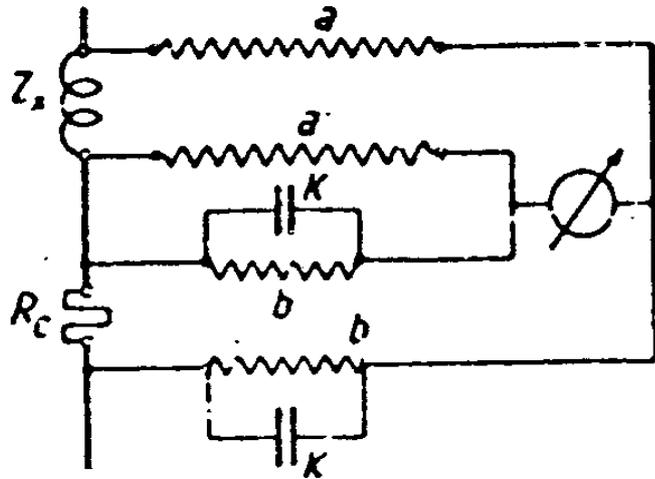


Figura 4.35: Doppio ponte a c.a.

4.13.8 Metodi di ponte a corrente alternata

La teoria generale del ponte a corrente alternata si può facilmente dedurre da quella del ponte a corrente continua. Basta perciò interpretare come equazioni vettoriali le equazioni algebriche che danno i valori della corrente (continua) in ciascun lato del ponte. In particolare la condizione di equilibrio $ac = bx$ (da cui $x = ac/b$) si deve interpretare come relazione vettoriale fra le quattro impedenze costituenti i quattro lati del ponte (caso più generale) scrivendola:

$$Z_x Z_b = Z_c Z_a \quad (4.2)$$

oppure

$$Z_x = Z_a Z_c Y_b \quad (4.3)$$

Sostituendo i complessi (genericamente: $Z = R + jX$) si ottiene:

$$(R_a R_c - X_a X_c) + j(X_a R_c + X_c R_a) = (R_b R_x - X_b X_x) + j(X_b R_x + X_x R_b)$$

Perché tale relazione sia soddisfatta, devono essere soddisfatte contemporaneamente le due relazioni:

$$R_a R_c - X_a X_c = R_b R_x - X_b X_x$$

$$X_a R_c + X_c R_a = X_b R_x + X_x R_b$$

che si possono scrivere anche:

$$\begin{aligned} R_a R_c - R_b R_x &= X_a X_c - X_b X_x \\ X_a R_c - X_b R_x &= X_x R_b - X_c R_a \end{aligned} \quad (4.4)$$

Sono queste le due condizioni che devono essere contemporaneamente soddisfatte per annullare ogni corrente nel galvanometro.

Come caso particolare, se $R_a R_c = R_b R_x$, ossia se le resistenze dei quattro lati soddisfano le condizioni di equilibrio, in virtù della prima deve essere anche: $X_a X_c = X_b X_x$, ossia anche le quattro reattanze devono stare nelle stesse proporzioni, cioè:

$$\frac{R_x}{R_c} = \frac{R_a}{R_b} = \frac{X_x}{X_c} = \frac{X_a}{X_b}$$

In modo più intuitivo, le condizioni di equilibrio si possono dedurre dal diagramma vettoriale del ponte che è facile tracciare per le condizioni di equilibrio. Basta infatti pensare che, in tali condizioni, non passando alcuna corrente nel galvanometro, i lati a e b sono percorsi da una stessa corrente I_a e i lati c e x dalla stessa I_x . Da tale diagramma in cui:

$$\overline{OA} = R_a I_a, \overline{AM} = X_a I_a, \overline{OX} = R_x I_x, \overline{XM} = X_x I_x,$$

$$\overline{MB} = R_b I_a, \overline{BD} = X_b I_a, \overline{MC} = R_c I_x, \overline{CD} = X_c I_x,$$

risulta infatti subito: $Z_a I_a = Z_x I_x$ e $Z_b I_a = Z_c I_x$ che, divise membro a membro, danno (relazioni algebriche): $Z_x Z_b = Z_c Z_a$

Ma risulta anche immediatamente: $\varphi_a - \varphi_x = \varphi_b - \varphi_c$

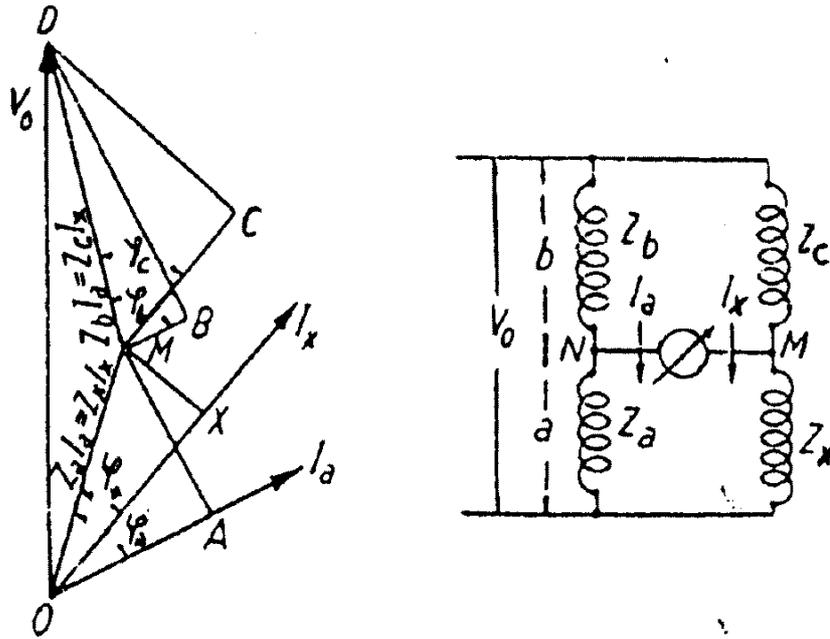


Figura 4.36: Schema e diagramma generale di un ponte a corrente alternata

Le due condizioni di equilibrio risultano pertanto espresse algebricamente dalle due relazioni fondamentali:

$$\begin{aligned} Z_x &= \frac{Z_a Z_c}{Z_b} = Z_a Z_c Y_b \\ \varphi_x &= \varphi_a - \varphi_b + \varphi_c \end{aligned} \tag{4.5}$$

che equivalgono alle formule 4.4.

Anche la seconda delle formule 4.5 ci dice che se, come caso particolare, $\varphi_a = \varphi_b$ (ossia le due impedenze Z_a e Z_b sono simili) risulta $\varphi_x = \varphi_c$ (ossia anche Z_c e Z_x devono essere simili).

Il fatto di dover soddisfare contemporaneamente due condizioni indipendenti si traduce, durante la misura, nella necessità di regolare due delle otto grandezze in gioco, indipendentemente l'una dall'altra. La cosa appare intuitiva, considerando ancora la figura 4.36. Dei quattro triangoli rettangoli OAM, OXM, MBD, MCD, la prima coppia (OXM e MCD) si può disegnare in modo qualunque, solo rispettando il parallelismo dei lati e la posizione dei vertici O e D. Della seconda coppia, il primo si può ancora disegnare in modo qualunque sull'ipotenusa OM, ma con ciò il quarto rimane poi perfettamente definito. Ciò vuol dire che, date tre qualunque delle quattro impedenze, si potrà annullare la corrente nel galvanometro solo se si potranno regolare al valore voluto, e indipendentemente l'una dall'altra, la R e la X della quarta.

4.13.9 Esempi di ponti a corrente alternata

Considerando il caso, particolarmente semplice, di un ponte costituito da due resistenze (a e b) e da due impedenze (figura 4.37) è chiaro che per poter annullare ogni corrente nel galvanometro, ossia per ottenere un metodo di zero propriamente detto, bisognerebbe che la V_x coincidesse con la frazione

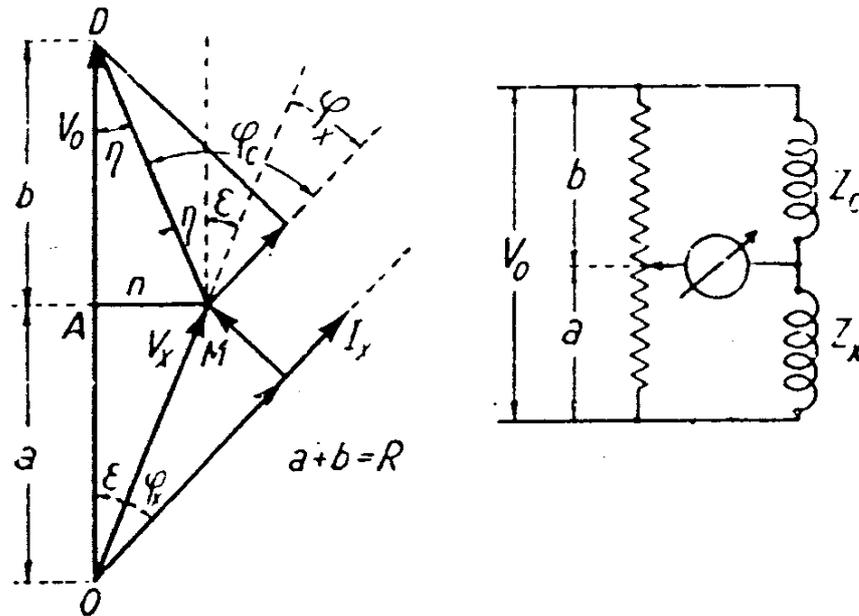


Figura 4.37: Ponte per proiezione

della V_0 che esiste agli estremi della parte a della $R = a + b$. Ciò può accadere (figura 4.38) solo se le due impedenze Z_x e Z_c sono simili ($\varphi_x = \varphi_c$).

Quando sia soddisfatta tale condizione risulta intuitivamente:

$$\frac{a}{b} = \frac{Z_x}{Z_c} = \frac{R_x}{R_c} = \frac{X_x}{X_c}$$

Sia le resistenze dei quattro lati stanno nei rapporti voluti per l'equilibrio, anche le reattanze devono soddisfare tale rapporto. Ovviamente quando la Z_x e la Z_c , siano qualunque, non si potrà giungere alla voluta condizione di equilibrio se non alterando un delle due in modo da renderla simile all'altra. Ora un'impedenza può essere modificata nei suoi elementi costitutivi in molti modi diversi: aggiungendo ad essa, in serie o in parallelo, una resistenza, una induttanza, una capacità, donde una grande varietà in questi schemi di ponte.

Per esempio, nel caso più semplice del confronto di due impedenze induttive, si può adottare lo schema della figura 4.39. La resistenza R regolabile, può, mediante il deviatore d , essere messa in serie con l'una o con l'altra delle due impedenze, e precisamente con quella delle due che è relativamente meno resistente. Riferendosi ancora al caso della figura 4.37, essendo $\varphi_c > \varphi_x$, si dovrebbe mettere la R in serie con la Z_c . Ciò fatto, regolando la R si possono rendere simili le impedenze dei due lato ($Z_c + R$) e Z_x in modo da far cadere il punto M sulla \overline{OD} . Regolando quindi il rapporto delle resistenze a e b si potrà annullare ogni corrente nel galvanometro. Sarà, allora, come già detto:

$$\frac{a}{b} = \frac{X_x}{X_c} = \frac{R_x}{R_c + R}$$

Con questo schema, che costituisce il *ponte di Wien* per la misure delle induttanze o delle capacità, le due grandezze da regolare indipendentemente l'una dall'altra sono la R e la a (o la b).

É interessante notare che la regolazione della R fa spostare il punto M su un arco di cerchio facilmente individuabile.

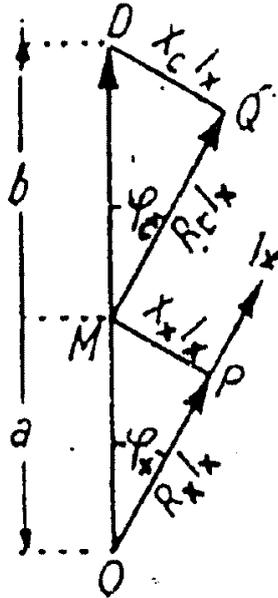


Figura 4.38: Diagramma del ponte all'equilibrio

La posizione in cui esso dovrà trovarsi ad equilibrio raggiunto, si ottiene prolungando la \overline{MN} (figura 4.40). Tale prolungamento infatti taglia la \overline{OB} nel punto A, il quale è il solo che soddisfa la condizione:

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{PM}}{\overline{NB}} = \frac{X_x}{X_c} = \frac{a}{b}$$

Ma d'altra parte, durante la regolazione della R, il triangolo OPM deve conservarsi simile a se stesso, perché le caratteristiche della Z_x non mutano. Pertanto, tracciata la \overline{AC} che formi con la \overline{OA} l'angolo alfa uguale all'angolo OMP, il suo punto d'incontro C con il prolungamento della \overline{MP} individua in \overline{OC} la corda del cerchio passante per A e per M, su cui si deve muovere il punto M in modo che, da esso, la corda stessa sia sempre vista sotto l'angolo α .

Come già detto si possono pensare e realizzare molti diversi schemi di ponte variando l'artificio mediante il quale si rendono simili le due impedenze da confrontare. Si possono allo scopo adottare induttanze, capacità e resistenze regolabili. In ogni caso per raggiungere le condizioni di equilibrio si dovranno regolare indipendentemente due grandezze.

Considerando, per esempio, lo schema del *ponte di Maxwell* (figura 4.41), il galvanometro (a vibrazione o ad amplificatori) potrà essere ridotto a zero regolando contemporaneamente la resistenza c e la capacità variabile K in parallelo sul lato b . Detta Z_b l'impedenza dell'arco doppio formato dalla K con la b , avremo allora, come al solito:

$$ac = Z_b Z_x$$

Ma

$$Z_x = R_x + j\omega L_x$$

$$Z_b = \frac{1}{1/b + j\omega K} = \frac{b}{1 + j\omega K b}$$

sostituendo : $ac(1 + j\omega K b) = b(R_x + j\omega L_x)$ che, uguagliando parti reali e immaginarie, si scinde nelle

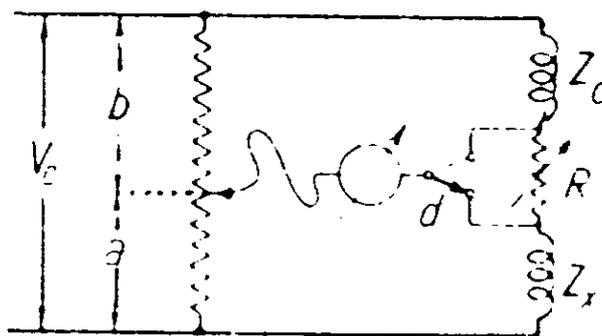


Figura 4.39: Schema del ponte di Wien

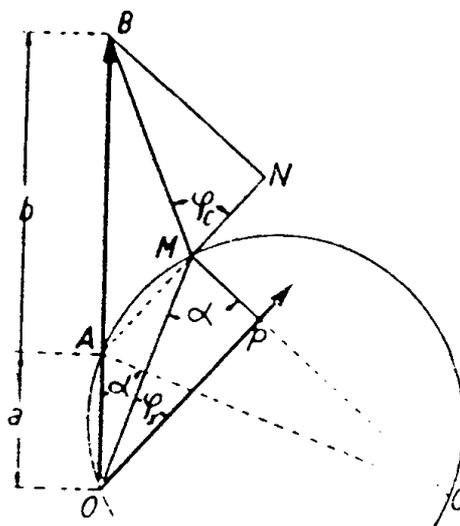


Figura 4.40:

due $ac = bR_x$ e $ac\omega Kb = b\omega L_x$ da cui

$$R_x = \frac{a}{b}c$$

ed

$$L_x = acK$$

che ci danno i parametri cercati della Z_x in funzione delle tre resistenze a , b e c e della capacità K , indipendentemente dal valore della frequenza, ossia della pulsazione.

Non va dimenticato che, in generale i valori di R_x ed L_x così determinati sono i valori delle grandezze del circuito equivalente in serie che si può pensare di sostituire alla Z_x . Tali valori equivalenti valgono esclusivamente per la frequenza e per la forma della curva con cui furono determinati. In generale le variazioni di tale valore al variare della frequenza sono modeste, tanto che in molti casi i valori stessi si suppongono costanti, almeno nei limiti ordinari delle frequenze industriali, ma anche con frequenze industriali le variazioni possono diventare assai notevoli se la Z_x contiene materiali magnetici o se il circuito è formato da conduttori massicci di notevole sezione. In tal caso le perdite nel ferro fanno

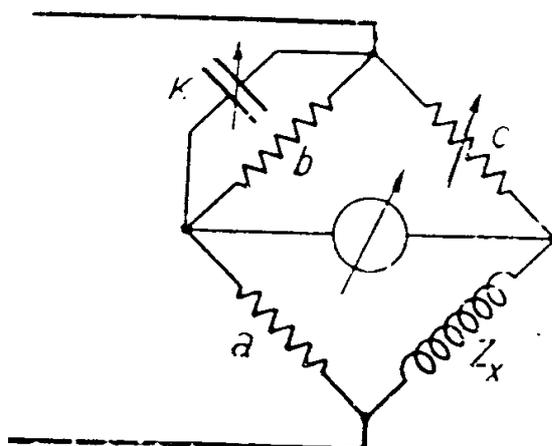


Figura 4.41: Ponte di Maxwell

umentare, con la frequenza, il valore della resistenza equivalente, che tiene conto delle perdite stesse, mentre le correnti indotte nella massa dei conduttori fanno diminuire l'induttanza.

Degno di nota il fatto che tanto in questo metodo quanto in altri che vedremo piú avanti, la formula risolutiva per la R_x é la stessa che nel ponte a corrente continua. Ne consegue la possibilitá di eseguire il metodo in due tempi: in un primo tempo, alimentato il ponte con una f.e.m. continua e usando un ordinario galvanometro per c.c., si equilibra il ponte regolando la c , con che appunto:

$$R_x = \frac{a}{b}c$$

La presenza della capacitá K derivata sul lato b , non disturba affatto la misura se si ha cura di chiudere la chiave di pila prima di quella di galvanometro, in modo che le correnti dovute al fenomeno transitorio della carica del condensatore, e che si sovrappongono a quelle di regime, siano cessate quando il galvanometro viene inserito. In un secondo tempo, alimentando il ponte a corrente alternata e usando un galvanometro a vibrazione, lo si riduce a zero regolando il solo condensatore K , senza piú toccare le resistenze a , b e c . Si realizza cosí la seconda condizione di equilibrio

$$L_x = acK$$

É interessante ricordare questo possibile modo di procedere, in quanto molti di questi metodi di ponte nacquerò assai prima che si sviluppessero le misure a corrente alternata, per la misura di induttanze e capacitá, utilizzando appunto il procedimento in due tempi. Regolate, nel primo tempo, le resistenze in modo da ottenere $R_x = \frac{a}{b}c$, nel secondo tempo bastava chiudere prima la chiave di galvanometro e poi quella di pila. Con ciò il galvanometro riceveva un impulso dovuto alla corrente transitoria; impulso che si poteva eliminare regolando la capacitá K , ossia realizzando di fatto l'altra condizione $L_x = acK$. La sensibilità di questa seconda fase risultava naturalmente piuttosto limitata: molto minore di quella raggiungibile alimentando il ponte in corrente alternata. Di piú non si deve dimenticare che salvo in caso di induttanze senza ferro e di filo sottile (non sede di apprezzabili correnti parassite) e di condensatori senza perdite, i valori di R_x , L_x e K sono sempre valori *equivalenti*, valevoli solo per quella particolare frequenza con cui vengono misurati i valori ottenuti coi vecchi metodi a corrente continua in due tempi, possono pertanto risultare sensibilmente diversi da quelli a frequenza industriale.

Per quanto il ponte di Maxwell possa servire per misure di capacità, quando al posto della Z_x si ponga un induttore campione, si preferisce generalmente ricorrere al confronto diretto con condensatori campione, che sono più facilmente realizzabili degli induttori.

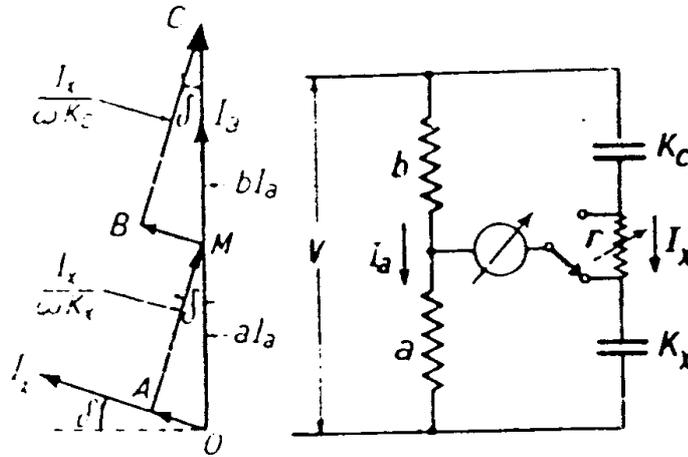


Figura 4.42: Ponte di Gott

Il metodo a cui generalmente si ricorre è quello del *ponte di Gott* di cui la figura 4.42 dá lo schema e il diagramma vettoriale, e che può dirsi il reciproco del ponte di Wien. Il diagramma vettoriale suppone che i due condensatori K_c e K_x messi a confronto abbiano forti perdite. La piccola resistenza regolabile r , che si può mettere in serie con quello dei due condensatori che ha relativamente minori perdite (il K_c , nel caso in figura), serve ancora per rendere simili i triangoli relativi ai due condensatori. Ad equilibrio raggiunto risulta:

$$\frac{K_x}{K_c} = \frac{b}{a}$$

$$\frac{r_x}{r_c + r} = \frac{a}{b}$$

Si noti la caratteristica inversione del rapporto a/b che è proprio di questo metodo.

L'importanza pratica del ponte di Gott deriva dal fatto che, nei condensatori usati normalmente nei laboratori, l'angolo di perdita delta è estremamente piccolo talché i segmenti \overline{OA} e \overline{MB} diventano trascurabili e le tensioni $\frac{I_x}{\omega K_x}$ e $I_x \omega K_c$ cadono praticamente sulla \overline{OC} . Si può quindi ottenere praticamente l'azzeramento regolando soltanto il rapporto a/b e scrivere

$$K_x = K_c \frac{b}{a}$$

Analogo al precedente, e assai usato per lo studio dei condensatori è il *ponte di Schering*. Com'è noto, un condensatore imperfetto (avente cioè una certa perdita nel dielettrico, per cui la corrente in esso, anziché a 90° in anticipo sulla tensione è spostata solo di $90^\circ - \delta$) può sempre concepirsi come un condensatore perfetto messo in serie con una resistenza ohmica r (figura 4.43).

Essendo: $\overline{OA} = rI_c$, e $\overline{AB} = \frac{I_c}{\omega C}$ risulta $\tan(\delta) = \frac{\overline{OA}}{\overline{AB}} = r\omega C$.

Ciò premesso, lo schema del ponte di Schering è dato in figura 4.44. In esso il complesso C_x, r_x , rappresenta, per quanto si è detto, il condensatore incognito, che si può concepire come una impedenza

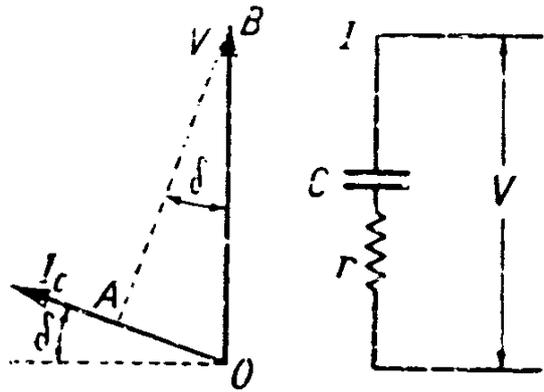


Figura 4.43: Circuito equivalente di un condensatore

Z_x ; C é un condensatore di capacità nota, senza perdite; a e b sono due resistenze ohmiche; K un condensatore variabile.

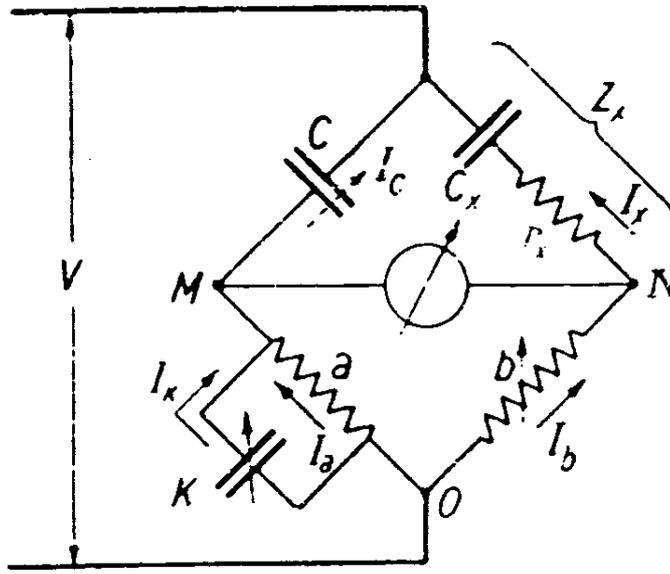


Figura 4.44: Ponte di Schering

Per l'equilibrio deve essere, come sempre:

$$Z_x = Z_b Z_c Y_a$$

dove

$$Z_x = r_x - j \frac{1}{\omega C_x}$$

$$Z_b = b$$

$$Z_c = -j \frac{1}{\omega C}$$

$$Y_a = \frac{1}{a} + j\omega K$$

sostituendo si ottiene:

$$Z_x = j \frac{b}{\omega C} \left(\frac{1}{a} + j\omega K \right)$$

che, uguagliando separatamente le parti reali e immaginarie, ci dá:

$$r_x = b \frac{K}{C}$$

$$C_x = C \frac{a}{b}$$

D'ordinario, nel caso di condensatori imperfetti, si usa definirli in base al valore di $\tan(\delta)$: si ha

$$\tan(\delta) = r_x \omega C_x = \omega a K$$

Allo stesso risultato si può giungere considerando il diagramma vettoriale del ponte all'equilibrio, rappresentato in figura 4.45.

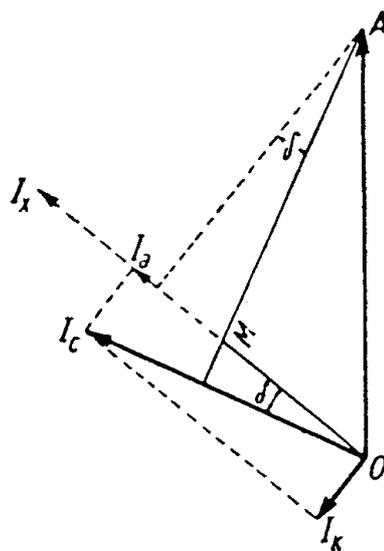


Figura 4.45:

Si ha infatti: $\overline{OM} = aI_a = bI_x = aI_c \cos(\delta)$; $\overline{MA} = Z_x I_x = \frac{1}{\omega C} I_c$.

Dividendo

$$\frac{b}{Z_x} = \omega C a \cos(\delta)$$

Ma

$$\frac{1}{\omega C_x} = Z_x \cos(\delta)$$

ossia

$$Z_x = \frac{1}{\omega C_x \cos(\delta)}$$

e quindi

$$b\omega C_x \cos(\delta) = \omega C a \cos(\delta)$$

donde

$$C_x = \frac{a}{b} C$$

mentre

$$\tan(\delta) = \frac{I_k}{I_a} = \omega K a$$

4.13.10 Ponti a corrente alternata con piú di quattro lati

Le considerazioni finora fatte possono sembrare insufficienti di fronte ai tipi piú complessi di ponte ormai entrati largamente nell'uso, come per esempio il *ponte di Anderson* per la misura delle induttanze, del quale la figura 4.46 dá lo schema.

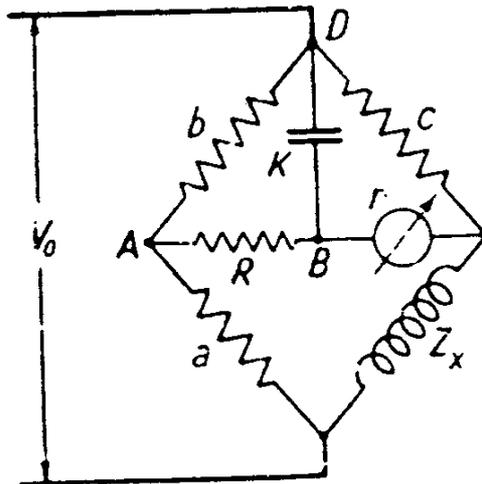


Figura 4.46: Schema del ponte di Anderson

Essi possono invece facilmente ricondursi sempre ai casi ordinari finora considerati. Cosí nel caso del ponte di Anderson, chiamando x la reattanza di capacitá $\frac{1}{\omega K}$ del condensatore K , potremo sempre, al triangolo ABD , formato dalle resistenze R e b e dalla $x = -j\frac{1}{\omega K}$ sostituire una stella equivalente. Sarà pertanto possibile sostituire allo schema del ponte di Anderson della figura 4.47a lo schema della figura 4.47b purché fra gli elementi *non coincidenti* dei due sussistano le relazioni:

$$p = \frac{bR}{b + R + x}$$

$$q = \frac{bx}{b + R + x}$$

$$s = \frac{Rx}{b + R + x}$$

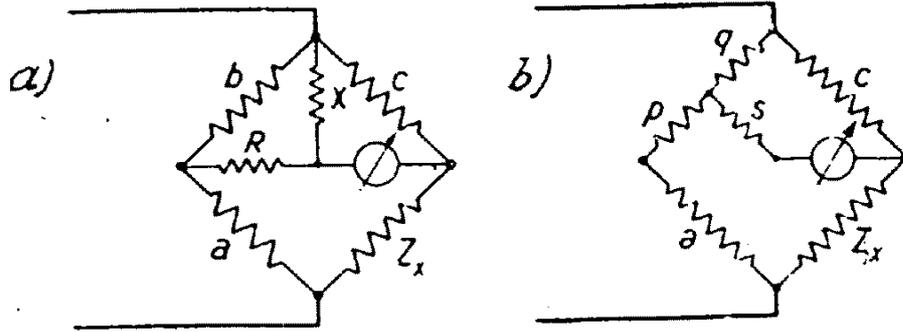


Figura 4.47: Trasformazione del ponte di Anderson in ponte ordinario

Siamo così ricondotti a un ponte ordinario i cui quattro lati sono: $a + p$, q , c , Z_x . La s in serie col galvanometro non interviene nella condizione di equilibrio che si scrive:

$$(a + p)c = qZ_x$$

Sostituendo a p e q i valori:

$$\left(a + \frac{bR}{b + R + x}\right)c = \frac{bx}{b + R + x}Z_x$$

donde:

$$[a(b + R + x) + bR]c = bxZ_x$$

Sostituendo i complessi, ricordando che a , b , c , R sono semplici resistenze che $x = -j\frac{1}{\omega K}$ e che $Z_x = R_x + j\omega L_x = R_x + j\omega L_x$, si ottiene:

$$[a(b + R - j\frac{1}{\omega K}) + bR]c = -j\frac{b}{\omega K}(R_x + j\omega L_x)$$

ossia

$$ca(b + R) + bRc - j\frac{ac}{\omega K} = \frac{\omega b L_x}{\omega K} - j\frac{b R_x}{\omega K}$$

Questa relazione si scinde nelle due condizioni:

$$\omega K[ca(b + R) + bRc] = \omega b L_x$$

$$ac = bR_x$$

La seconda ci mostra che le resistenze dei quattro lati del ponte devono soddisfare alla solita condizione di equilibrio, ossia:

$$R_x = \frac{a}{b}c$$

La prima si semplifica nella relazione:

$$L_x = Kc\left[a\left(1 + \frac{R}{b}\right) + R\right]$$

che ci dá il valore dell'induttanza L_x della Z_x in funzione della capacità K e delle quattro resistenze.

Se pertanto si regolano per successivi tentativi le resistenze fino ad annullare ogni corrente nel galvanometro, le ultime due relazioni ci danno i valori cercati di R_x e di L_x , indipendentemente dal valore

della frequenza. Oppure quando la Z_x sia a parametri costanti (induttanza senza ferro) si può prima alimentare il ponte con corrente continua, sostituendo al galvanometro a vibrazione un galvanometro elettromagnetico, e, fissato a/b , regolare la c fino all'equilibrio. La presenza del condensatore K non influisce infatti sull'equilibrio del ponte. Quindi, alimentando il ponte con corrente alternata, senza più toccare a , b , c , si ridurrà a zero il galvanometro a vibrazione (o equivalente) regolando la R .

L'uso di uno schema più complesso, qual è quello del ponte di Anderson, in confronto con quello del ponte di Maxwell, è giustificato dal fatto che esso consente la misura di induttanze di maggior valore utilizzando lo stesso condensatore campione, il quale inoltre non deve essere più di tipo regolabile.

4.13.11 Ponti automatici a corrente alternata

Come abbiamo già visto è ovvia la possibilità di realizzare ponti a corrente alternata a regolazione ed eventuale registrazione automatica. In modo del tutto analogo basterà inserire sulla diagonale di galvanometro due relé i quali sentano rispettivamente la componente in fase e la componente in quadratura con la tensione che alimenta il ponte, e comandino due servomotori i quali regolino indipendentemente le due variabili del metodo. Così per esempio, nel caso del ponte di Schering, uno dei servomotori dovrà regolare il lato b e l'altro il condensatore variabile K . Come nel caso del potenziometro si potrà ottenere una regolazione diretta utilizzando due strumenti a induzione che riuniscano in sé le funzioni di relé e di servomotore.

4.13.12 Le schermature nei ponti in corrente alternata

Nelle *misure con corrente alternata*, oltre alle deficienze di isolamento interno ed esterno, sono da temersi anche gli accoppiamenti parassiti, capacitivi e induttivi, fra le varie parti del circuito, ma isofrequenziali con la corrente di misura.

I concatenamenti parassiti sono tanto più dannosi quanto è maggiore la frequenza; perciò, mentre hanno una influenza modesta a frequenza industriale, acquistano importanza notevole per le medie frequenze (acustiche) e diventano assolutamente preponderanti per le radiofrequenze.

Limitandoci alle frequenze industriali o, al più, acustiche, osserviamo che la protezione contro le correnti disperse di conduzione si effettua con piastre ed anelli di guardia, come per la corrente continua.

I concatenamenti parassiti capacitivi hanno luogo fra i vari tronchi del circuito di misura che vengono a costruire altrettante armature di condensatori aventi per dielettrico l'aria interposta; attraverso l'aria avvengono scambi di corrente dielettrica che non seguono le vie normali previste dal circuito di misura e possono falsare anche gravemente i risultati.

Per eliminare o almeno guidare questi scambi, il procedimento è quello di interporre sul percorso della corrente dielettrica un conduttore (lastra o tubo, a seconda della forma del circuito da proteggere) collegato in modo che assuma un potenziale prossimo a quello del tratto di circuito da proteggere; alle capacità parassite fra i due tratti di circuito si vengono così a sostituire due capacità in serie, di cui quella fra il tronco da proteggere e lo schermo (elettrostatico o meglio dielettrico) è senza effetti sulla misura, essendo piccolissima la loro differenza di potenziale, mentre l'altra dà luogo a un passaggio di

corrente solitamente maggiore di quella che circola quando non esiste schermatura, ma che costituisce solo una maggiore prestazione per la sorgente che alimenta il circuito, mentre é senza effetti sulla misura, non interessando le parti che devono essere protette.

Si ripete cioé il procedimento, già noto per le correnti di conduzione, di tagliare la strada alle correnti disturbanti che sono ora correnti dielettriche.

Non sempre però il procedimento é applicabile facilmente; talvolta la capacità fra schermo e tronco da proteggere, se pure é piccola la loro differenza di potenziale, deve essere presa anch'essa in considerazione nella espressione dei risultati, cioé che obbliga a conoscerla con esattezza e complica i conteggi.

Tipico il caso del ponte di Schering schermato nei tratti che vanno dai due condensatori (il campione e quello in prova) ai vertici di galvanometro (figura 4.48). Si ritiene solitamente che questa schermatura, abbinata a un allontanamento dei due condensatori, e quindi dell'alta tensione, dal galvanometro e dai lati resistivi del ponte, sia sufficiente allo scopo, perché protegge dagli effetti dei concatenamenti con l'alta tensione i due tronchi di circuito che collegano i condensatori, mentre alla protezione degli altri due lati del ponte e del galvanometro sopperisce la lontananza. Gli schermi sono in questo caso costituiti da due tubi metallici flessibili che circondano i due conduttori e si prolungano fino agli anelli di guardia contribuendo di fatto anche a drenare la corrente di conduzione superficiale e a delimitare una zona dei due condensatori in cui il campo dielettrico é uniforme.

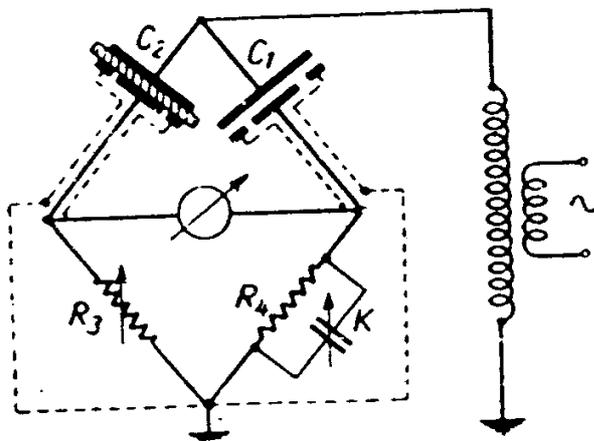


Figura 4.48:

Questi schermi sono messi a terra, come il vertice inferiore del ponte, che é poi uno dei due vertici dell'alimentazione. Dato che le impedenze dei due condensatori sono di gran lunga maggiori delle impedenze dei due lati resistivi, quasi tutta la tensione applicata si esaurisce nei due condensatori, sicché la differenza di potenziale fra i vertici di galvanometro e la terra risulta piccola (questa disposizione si allontana da quella di massima sensibilità, ma é consigliabile per la sicurezza dell'operatore e per diminuire le cause di disturbo).

Si osserva però che la capacità fra i due tronchi schermati e gli schermi sono rappresentabili con due condensatori derivati fra i vertici di galvanometro e la terra e quindi in parallelo con i lati resistivi del ponte. Si tratta certo di capacità piccolissime, che possono tuttavia introdurre degli errori specialmente

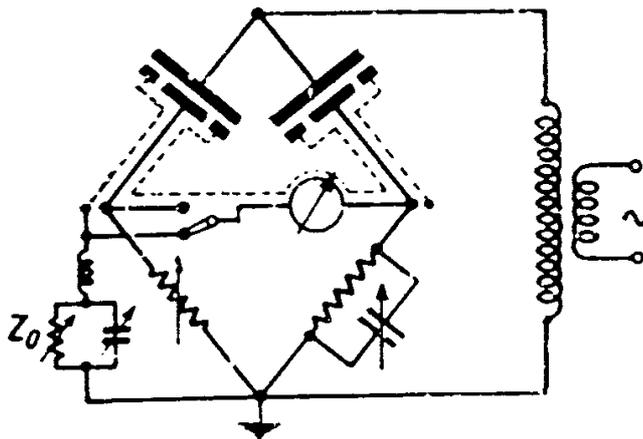


Figura 4.49:

in media frequenza, ma anche talvolta con frequenza industriale, specialmente quando è molto piccolo l'angolo di perdita del condensatore in esame, perché la capacità K risulta piccolissima e quindi si avvicina all'ordine di grandezza della corrispondente capacità parassita. In questo caso conviene dare agli schermi un potenziale uguale a quello dei due vertici di galvanometro (in equilibrio); a tale fine lo schermo non è collegato a terra direttamente, ma attraverso una impedenza Z_0 , regolabile in valore e angolo, detta *impedenza di bilanciamento* e costituita di solito da un induttore in serie con un arco doppio resistore-condensatore (figura 4.49). Il galvanometro a sua volta può essere connesso a un commutatore sia fra i vertici corrispondenti del ponte, in inserzione normale, sia fra uno dei due vertici e lo schermo, per il bilanciamento.

Portato il ponte in equilibrio normalmente, si sposta il commutatore sulla posizione di bilanciamento e si regola il potenziale dello schermo, fino a quando il galvanometro torna a zero. Poiché questa operazione può avere squilibrato il ponte, le due operazioni di equilibratura del ponte e di bilanciamento dello schermo vanno ripetute alternativamente più volte, finché si ottiene l'azzeramento del galvanometro contemporaneamente nelle due condizioni. In tale modo il ponte è in equilibrio e lo schermo si trova al potenziale del galvanometro; non vi può quindi essere nessun passaggio di corrente dielettrica fra galvanometro e lo schermo e la loro capacità mutua è senza effetti.

Nel caso delle medie frequenze gli accoppiamenti capacitivi assumono maggiore importanza; in particolare non è più possibile supporre le capacità dei vari elementi che costituiscono il circuito come concentrati in un punto, ma è necessario considerarle, come in realtà distribuite (figura 4.50a) e in generale variabili con la posizione degli oggetti circostanti.

Perciò, in media frequenza, ogni elemento costituente il circuito di misura, viene schermato singolarmente con un tubo metallico che va collegato a uno dei morsetti dell'oggetto stesso (figura 4.50b). In tal modo la capacità distribuita risulta derivata verso lo schermo e quindi definita e invariabile, sicché se ne può tenere conto nella determinazione dell'impedenza dell'oggetto. Inoltre la capacità verso l'esterno risulta tutta riportata a un estremo, il che semplifica notevolmente lo studio della sua influenza sulla misura.

A sua volta questa capacità verso l'esterno può essere resa fissa circondando i vari elementi schermati con un secondo schermo messo a terra. La disposizione e i collegamenti degli schermi variano da caso a caso, devono essere studiati di volta in volta in modo da eliminare o governare le ammettenze derivate che possono influire sulla precisione della misura.

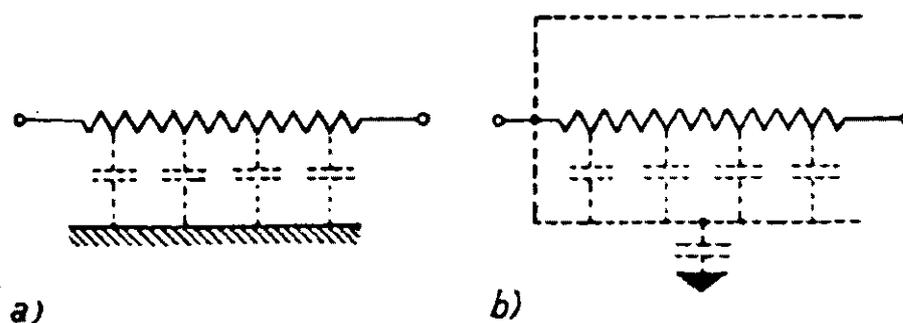


Figura 4.50:

Uno schema generico di ponte con doppia schermatura é rappresentato nella figura 4.51, dove ogni lato del ponte é rappresentato con un'impedenza schermata; una seconda schermatura generale circonda le precedenti e le connessioni del ponte ed é messa a terra. Il generatore di alimentazione e l'indicatore di zero sono collegati al ponte per mezzo di trasformatori di isolamento, pure schermati.

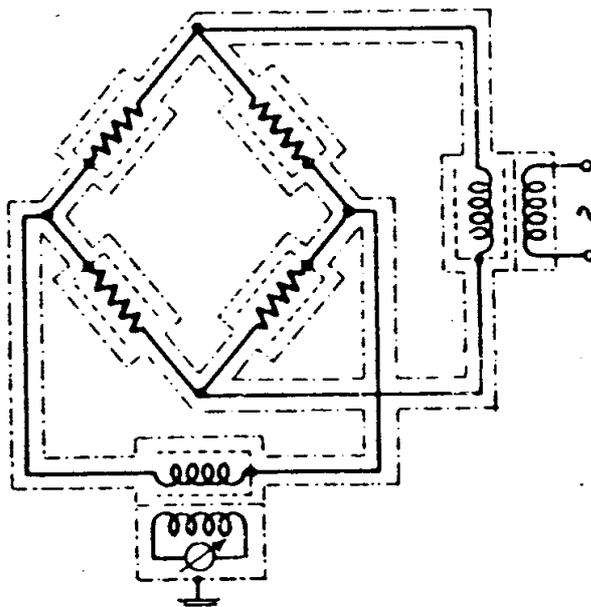


Figura 4.51:

Poiché gli schermi dei singoli lati riportano ai vertici del ponte le ammettenze derivate verso terra, torna vantaggioso eliminare gli effetti di qualcuna di queste ammettenze annullando la differenza di potenziale fra vertici corrispondenti e terra.

Si é già illustrato il procedimento dello schermo bilanciato solitamente usato in bassa frequenza, che consiste nel portare lo schermo potenziale dei vertici di galvanometro. In media frequenza si adopera piú spesso un sistema reciproco, detto della *messa a terra di Wagner*, rappresentato in figura 4.52.

Il procedimento richiede un ponte ausiliario costituito dai due lati \overline{AB} e \overline{BC} del ponte principale e dalle due impedenze regolabili \overline{AT} e \overline{CT} ; questo ponte deve essere azzerato insieme con il ponte principale e l'operazione di azzeramento dei due ponti puó anche venire effettuata alternativamente,

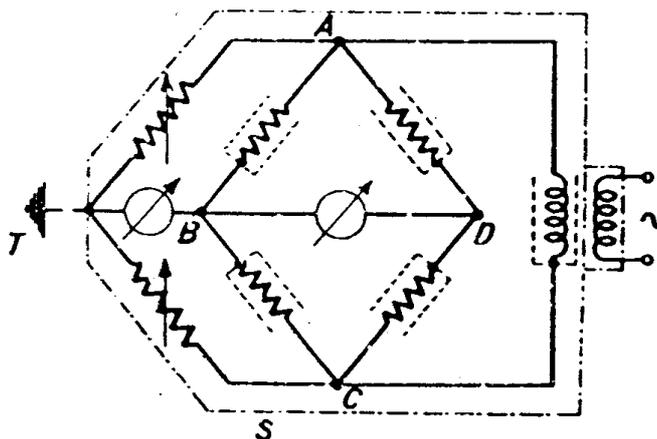


Figura 4.52:

con lo stesso galvanometro, passando ripetutamente dall'una all'altra inserzione.

Quando i due ponti sono equilibrati i due vertici B e D del ponte principale sono al potenziale di terra, come lo schermo generale S (rappresentato per chiarezza di disegno col solo contorno esterno); la loro ammettenza verso terra é perciò senza effetti sulla misura.

Gli schermi elettrostatici, come sopra descritti, in quanto si interpongono fra i supporti materiali dei circuiti, servono anche a drenare le correnti laterali di conduzione che hanno per sostegno, invece dell'aria, appunto tali supporti, ma sono dovute alla stessa causa che determina le correnti dielettriche. Gli schermi elettrostatici assumono perciò essi stessi la funzione delle piastre e degli anelli di guardia e possono quindi essere piú in generale considerati come schermi contro le ammettenze laterali di dispersione. Fanno eccezione le misure con correnti impulsive (misure balistiche), per le quali gli schermi elettrostatici devono essere tenuti distinti dalle guardie.

Dato poi il loro collegamento a terra, gli stessi schermi sono generalmente efficaci non solo contro le cause interne, ma anche contro i campi elettrici (correnti disperse) e dielettrici dovuti a cause esterne al circuito di misura.

Per completare il quadro delle protezioni contro i disturbi restano da esaminare i concatenamenti parassiti induttivi fra le parti del circuito di misura e con campi magnetici esterni. Trattandosi anzi qui di campi alternati, dobbiamo considerarli piú generalmente come campi elettromagnetici, che possono determinare variazioni anche sensibili nella impedenza di qualche lato del ponte.

Diremo subito che queste cause di disturbo sono molto meno importanti delle precedenti e sono solitamente limitate a qualche parte del circuito di misura e particolarmente al generatore. La protezione contro questi disturbi puó essere eseguita, circondando le parti da proteggere con una scatola di materiale ad alta permeabilitá, ma poiché si tratta di campi variabili piuttosto rapidamente, il migliore sistema di schermatura consiste ancora nell'interporre fra causa disturbante e oggetto da proteggere una lastra di materiale conduttore. Le correnti parassite in esso indotte dal campo elettromagnetico tendono infatti a indebolirlo e producono perciò un effetto schermante.

A differenza di quanto avviene per gli schermi elettrostatici non é però qui piú necessario che lo schermo assuma un potenziale definito o sia collegato a qualche punto particolare del circuito di misura;

la sua azione schermante é infatti legata solo alle correnti parassite indotte nella massa stessa del conduttore del campo perturbatore; perciò essa é tanto maggiore quanto piú grandi sono la conduttività del materiale costituente lo schermo e il suo spessore; a parità di altre caratteristiche, la permeabilità magnetica del materiale esercita pure una azione favorevole. Normalmente si usano lastre o tubi di rame dello spessore di 1mm circa.

Naturalmente l'effetto schermante cresce, a parità di altre circostanze, con la frequenza, tanto che, con le frequenze piú elevate, può bastare uno schermo a gabbia invece che continuo.

Per quanto detto, gli stessi schermi elettrostatici, se costituiti di sufficiente spessore e saldati con cura in modo da non dare luogo a discontinuitá, servono anche come protezione contro gli accoppiamenti parassiti elettromagnetici. La loro presenza determina però in questo caso delle perdite di energia di cui occorre talvolta tenere debito conto.

4.14 Ponti a lati di rapporto induttivi (Ponti a trasformatore)

Concettualmente simili al ponte di Gott per il confronto tra condensatori, impiegano un divisore di tensione a rapporto variabile di tipo induttivo. Pregio fondamentale di questi dispositivi, tale da qualificarli come sistemi di misura di alta precisione, é la possibilità di quantificare il rapporto del ramo induttivo mediante il conteggio delle spire. Nello schema fondamentale di figura 4.53, infatti, la condizione di equilibrio del ponte si ha quando risulta:

$$\frac{Y_x}{Y_c} = \frac{V_c}{V_x} \simeq \frac{E_1}{E_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

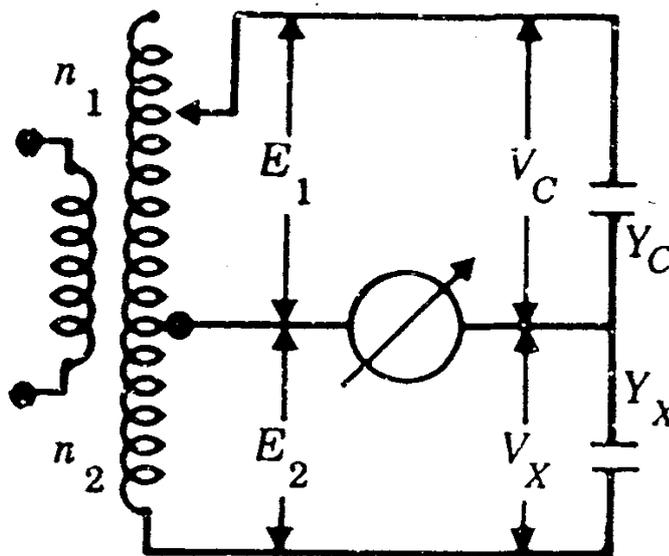


Figura 4.53: Ponte a trsformatore.Schema di principio

Affinché il rapporto di spire del divisore induttivo corrisponda, con la richiesta approssimazione, al

rapporto inverso delle ammettenze si deve realizzare un divisore di tensione induttivo con le seguenti caratteristiche:

- a) che la f.e.m. per spira sia uguale lungo tutto il divisore;
- b) che la c. di t. interna al divisore induttivo sia trascurabile rispetto alle tensioni in gioco.

Le due condizioni si ottengono mediante l'impiego di nuclei magnetici torici costituiti con leghe magnetiche ad elevatissima permeabilità relativa (da 50000 a 250000) e realizzando avvolgimenti di bassa resistenza avvolti a spire strette e ben uniformi. L'impiego di schermature magnetiche facilita il contenimento del flusso utile riducendo le reattanze di dispersione.

Sistemi di questo genere presentano una elevata impedenza in ingresso.

Per ottenere la condizione di equilibrio, nel caso di ponti per il confronto tra condensatori campione, occorre poter regolare il rapporto spire con elevata finezza.

4.14.1 Impiego di più condensatori campione sul ramo di riferimento

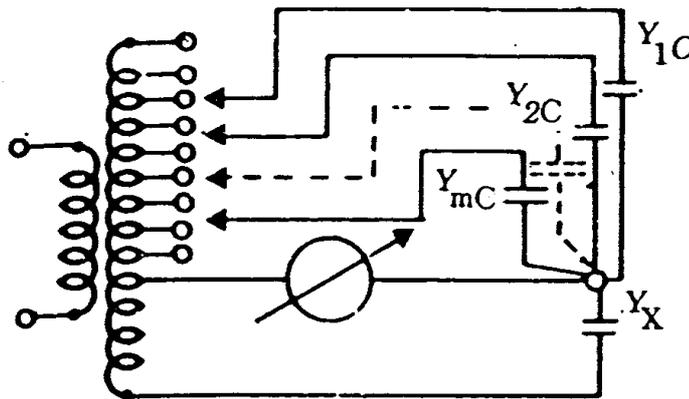


Figura 4.54: Impiego di più condensatori campione

Poiché la condizione di equilibrio del ponte corrisponde al bilanciamento delle correnti capacitive nel nodo di galvanometro, cioè:

$$I_x = I_1c + I_2c + \dots + I_m c$$

si ottiene

$$Y_x V_x = Y_1 c V_1 c + Y_2 c V_2 c + \dots + Y_m c V_m c$$

impiegando m condensatori campione scalati di valore secondo ordini di grandezza successivi, da inserire separatamente su una tra 10 prese diverse del ramo induttivo di regolazione (uniformemente distribuite sull'avvolgimento) si ottiene anche:

$$Y_x V_x = Y_1 c \frac{\alpha_1}{10} V_c + Y_2 c \frac{\alpha_2}{10} V_c + \dots + Y_m c \frac{\alpha_m}{10} V_c$$

con V_c tensione applicata a tutto il ramo di regolazione ed $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ dei coefficienti numerici interi compresi tra 0 e 9. Infine, considerando i rapporti previsti tra gli m condensatori campione (ordini di grandezza successivi) si ha :

$$Y_x = \frac{V_c}{V_x} Y_1 c \left(\frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10} 10^{-1} + \dots + \frac{\alpha_m}{10} 10^{-(m-1)} \right)$$

La sensibilità di una simile regolazione é pari a 10^{-m} , ottenibile con l'impiego di soli m condensatori campione e con una suddivisione dell'avvolgimento del ramo di regolazione in sole 10 parti.

4.14.2 Impiego di un divisore potenziometrico tipo Thompson-Varley

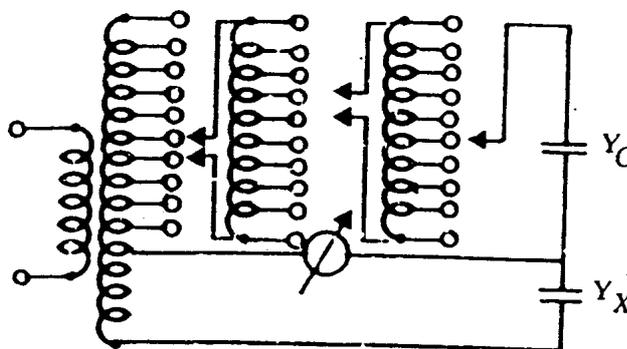


Figura 4.55: Lato di regolazione: schema Thompson-Varley

É possibile impiegare una variante induttiva dello schema di divisore potenziometrico detto di Thompson-Varley che, nella forma classica, verrà descritto nei prossimi paragrafi. Una semplificazione introdotta nello schema induttivo é che non ci si deve preoccupare degli assorbimenti di corrente provocati dalle decadi successive.

Infatti, caratteristiche peculiari dei divisori induttivi sono l'elevata impedenza in ingresso e la minima impedenza in uscita.

L'influenza di una decade successiva, quando viene inserita in parallelo a un gradino della decade precedente, é praticamente nulla, in condizioni di regime. Per quanto riguarda la transizione da una posizione all'altra si provvede a limitare la corrente di inserzione con contatti ausiliari resistivi.

In questo caso, quindi, nel ponte si impiega un solo condensatore campione e la regolazione di bilanciamento viene finemente realizzata con l'impiego di un numero m di divisori in cascata (secondo appunto lo schema Thompson-Varley) divisi in sole 10 parti, ed in numero pari alle decadi che si intendono utilizzare. Nei dispositivi di regolazione sopra descritti per ponti a lati di rapporto induttivi si impiegano normalmente da 5 a 9 decadi.

La frequenza di alimentazione di questi ponti é normalmente compresa tra 50 e 10000 Hertz con tensione applicata fino a 350 Volt. La frequenza di esercizio puó essere scelta dall'operatore, tenendo solo presente che la tensione di operazione deve essere ridotta in proporzione alla frequenza impiegata, per mantenere invariata l'induzione nei nuclei.

Una frequenza tipica per l'impiego di questi ponti é quella di 1592 Hertz, corrispondente alla pulsazione $\omega = 10000$.

A questa frequenza infatti viene effettuato il confronto tra un condensatore campione e un resistore campione di 100000 ohm nelle operazioni di trasferimento della precisione dal condensatore campione calcolabile al resistore campione.

In questi ponti, previsti per il funzionamento in media frequenza, l'impiego di elementi schermati é di rigore.

In figura 4.56 viene descritto un ponte a lati induttivi considerato fra i piú efficienti. Le capacità di schermatura sono indicate con linee a tratteggio.

$$n_1 i_1 = n_2 i_2$$

$$C_x = C_N \frac{n_2}{n_1}$$

$$\tan(\delta) = R\omega C$$

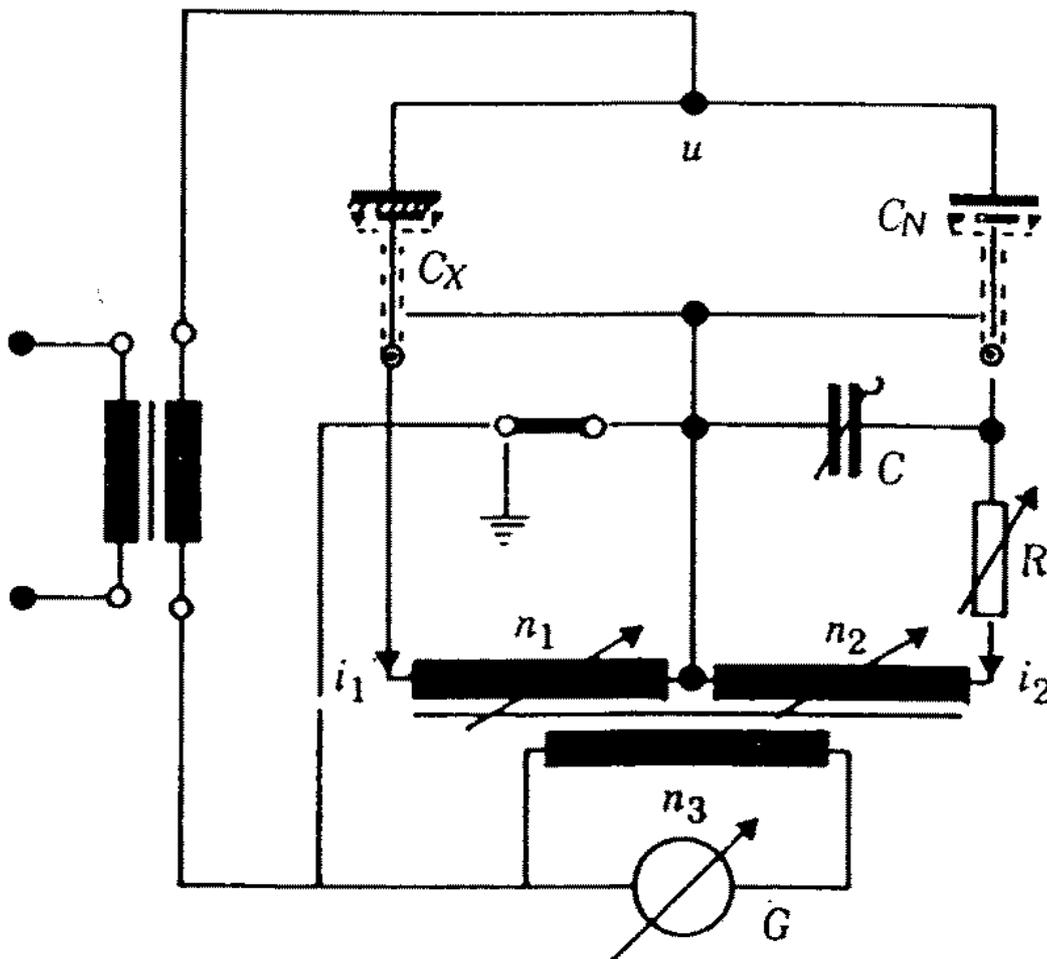


Figura 4.56:

Parte II

Sensori e Trasduttori

Capitolo 5

Sensori e Trasduttori

Una delle ragioni della diffusione dell'elettronica in molti contesti è la possibilità di ricondurre molte grandezze fisiche a grandezze elettriche, tramite sensori o trasduttori. Trasduzione : la variazione di una grandezza fisica è tradotta in una variazione di tipo elettrico. Con riferimento alle tematiche del corso, noi possiamo parlare di uso dell'elettronica per l'effettuazione di misure. (v.Fotocopia 9 Fig 26.3)

5.1 Sensori di temperatura a termocoppia

5.1.1 Termocoppia

Consideriamo un circuito costituito da materiali (metallici) di tipo diverso.

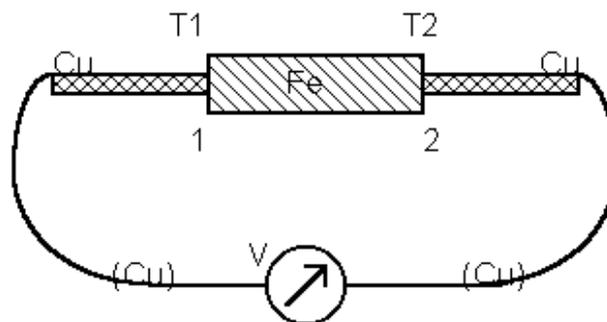


Figura 5.1: Circuito costituito da materiali di tipo diverso

Se la temperatura delle due giunzioni 1 e 2 è la stessa, per la seconda legge di Volta la differenza di potenziale misurata è nulla. Se viceversa le temperature T1 e T2 differiscono, avremo una tensione $V \neq 0$: la catena non è isoterma. Si parla di effetto termoelettrico o effetto Seebeck. La differenza di potenziale dipende dai materiali, dalla differenza T2-T1, ma non dalla variazione di temperatura lungo i materiali. Diversi sono i fenomeni che intervengono a determinare V : la struttura elettronica, il livello di Fermi, variazioni dei coefficienti di diffusione, ecc... Possiamo riassumere tali fenomeni

nella seguente descrizione: dati due materiali A e B, alla giunzione tra essi si localizza una differenza di potenziale legata alla temperatura:

$$E_t^{AB} = a_1T + a_2T^2 + a_3T^3 + \dots \quad (\text{termine lineare prevalente})$$

Es. ferro-costantana (lega Cu-Ni) :

$$E_t^{AB} = 50.37T + 3.43T^2 + 8.57 \cdot 10^{-5}T^3 + \dots$$

Nel caso in cui nella catena ci siano giunzioni a temperatura diversa :

$$E_{T_1, T_2}^{AB} = E_{T_1}^{AB} - E_{T_2}^{AB} = a_1(T_1 - T_2) + a_2(T_1^2 - T_2^2) + \dots$$

5.1.2 5 Leggi di impiego della termocoppia

1. La differenza di potenziale dipende dalla differenza di temperatura alle giunzioni, e non dalle temperature intermedie.

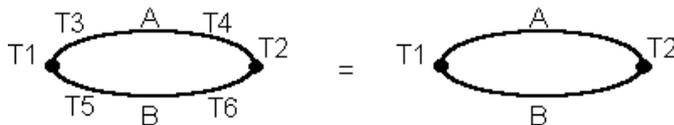


Figura 5.2: Prima legge di impiego della termocoppia

2. Se le due giunzioni ai capi del materiale C sono alla stessa temperatura, la differenza di potenziale resta invariata (come se C non ci fosse) :

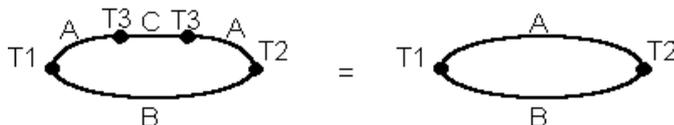


Figura 5.3: Seconda legge di impiego della termocoppia

3. Lo stesso discorso della 2) vale se C è posto dalla parte di una delle due giunzioni:

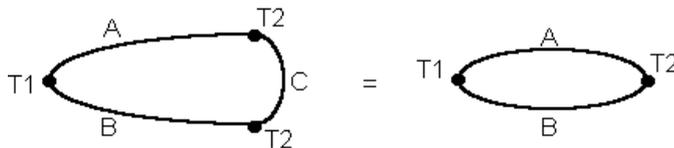


Figura 5.4: Terza legge di impiego della termocoppia

4. La somma delle differenze di potenziale delle due termocoppie distinte che operano alla stessa temperatura è pari alla differenza di potenziale tra i materiali A e B della prima e seconda rispettivamente (legge del materiale intermedio) :

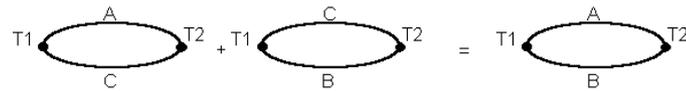


Figura 5.5: Quarta legge di impiego della termocoppia

5. Legge della temperatura intermedia :

$$E_{T_1, T_3}^{AB} + E_{T_3, T_2}^{AB} = E_{T_1, T_2}^{AB}$$

$$\text{Se } T_2 = 0 \text{ } ^\circ\text{C} \implies E_{T_1, 0}^{AB} = E_{T_1, T_3}^{AB} + E_{T_3, 0}^{AB}$$

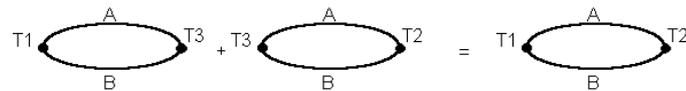


Figura 5.6: Prima legge di impiego della termocoppia

Tipicamente si forniscono tabelle di differenze di potenziale con un riferimento di tensione a zero gradi Celsius. La tabella di *figura 26.25 (fotocopia 10)* indica alcune delle più diffuse termocoppie, le loro denominazioni standard (colonna 'Type') ed gli intervalli di temperatura di funzionamento. Nella *figura 26.26* sono invece indicate le tensioni prodotte a diverse temperature dalle medesime termocoppie (con riferimento ad una temperatura di 0 °C).

5.1.3 Esempio di impiego di una termocoppia

Vogliamo osservare la temperatura di un fluido in un tubo: all'interno di esso porremo una giunzione della termocoppia; determiniamo la differenza di potenziale sfruttando la terza legge.

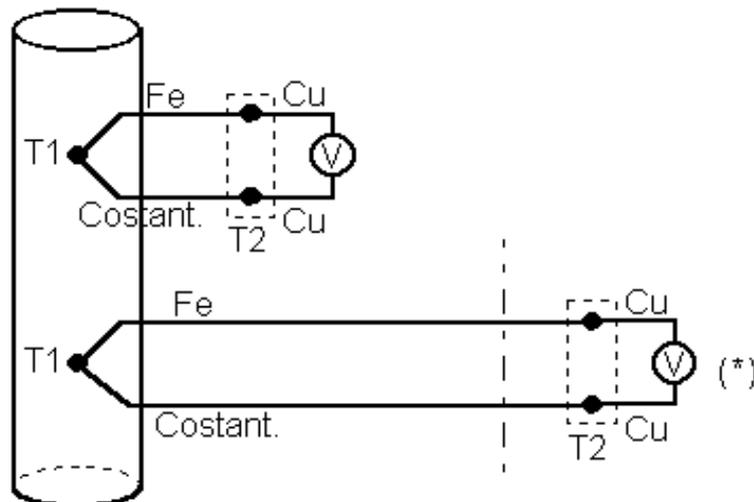


Figura 5.7: Esempio di impiego della termocoppia

La misura è corretta se le due giunzioni che interessano il rame sono alla stessa temperatura (ad esempio disponendole a contatto termico). Sarà particolarmente importante il controllo termico di T2; se non siamo in grado di assicurare un valore di T2 sufficientemente stabile, saremo costretti ad effettuare la connessione a lunga distanza con gli stessi materiali della termocoppia (*). Non ha importanza la temperatura lungo i fili. (la soluzione più adeguata sarebbe quella di fissare T2 al riferimento della termocoppia : 0 °C - acqua-ghiaccio).

$$\underbrace{E_{T_1, T_2}^{AB}}_{\text{misurato}} = E_{T_1, 0}^{AB} - E_{T_2, 0}^{AB}$$

Ci interessa T1, quindi dobbiamo conoscere T2 : noto e costante nel tempo. Consideriamo il circuito in figura 26.27 (fotocopia 10).

∂_M = temperatura misurata

∂_R = temperatura di riferimento

Il valore di temperatura di riferimento determina una tensione che si somma a quella misurata, dovuta alla temperatura ignota. L'amplificatore ha il compito di riportare il coefficiente di temperatura della giunzione ferro-costantana, ad un coefficiente confrontabile con quello legato al riferimento.

$$51.7 \frac{\mu V}{^\circ C} (\partial_M - \partial_R) \longrightarrow 10 \frac{mV}{^\circ C} (\partial_M - \partial_R)$$

Nel circuito di figura 26.28 si provvede ad effettuare la compensazione mediante un sensore di temperatura che genera una tensione proporzionale alla temperatura stessa. Il primo amplificatore è di guadagno 192 ed ha il compito visto in precedenza; il secondo amplificatore ha guadagno unitario e provvede ad isolare le tensioni misurate permettendone la lettura. All'ingresso dell'operazionale abbiamo la somma di $10 \frac{mV}{^\circ C} (\partial_M - \partial_R)$ e $10 \frac{mV}{^\circ C} (\partial_R)$ quindi, come volevamo, una tensione proporzionale alla temperatura da misurare : $10 \frac{mV}{^\circ C} (\partial_M)$

E' possibile uno schema differente che compensi il circuito prima di amplificare il segnale della termocoppia :

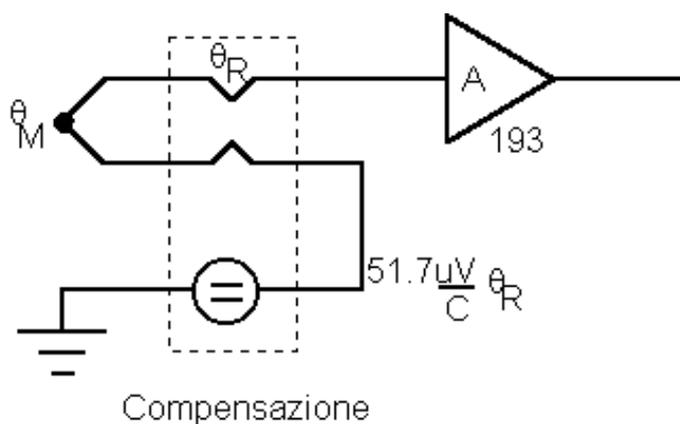


Figura 5.8:

La misura di una temperatura richiede la conoscenza di una temperatura di riferimento, altrimenti si applica una compensazione togliendo al contributo della termocoppia quello legato alla temperatura di riferimento.

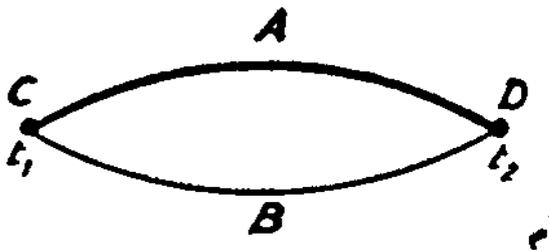


Figura 5.9:

5.2 Termocoppie-Complementi

5.2.1 Generalità.

L'*effetto termoelettrico*, scoperto da T.J. Seebeck nel 1821, consiste nel fatto che si collegano fra loro due metalli diversi si stabilizza una f.e.m. a cavallo della giunzione.

Si considerino ora due metalli, che per comodità riterremo sotto forma di due fili A e B (Fig. 5.9), saldati alle estremità C e D, rispettivamente a temperatura t_1 e t_2 : ne deriverà quanto segue.

1. Se i metalli sono di natura diversa, supposte diverse le due temperature delle due giunzioni, il circuito costituito dai due fili è sede di una f.e.m. e risultante delle f.e.m. che nascono a cavallo delle due giunzioni.
2. Se i metalli sono diversi ma $t_1 = t_2$ le due f.e.m. a cavallo fra le due giunzioni sono eguali ed opposte, per cui la f.e.m. e risultante è nulla.
3. Infine se i due fili sono dello stesso metallo nessuna f.e.m. nasce a cavallo delle giunzioni per cui non si avrà nessuna f.e.m. e risultante, qualsiasi siano i valori di t_1 e t_2 .

I due fili di materiale diverso costituiscono una *coppia termoelettrica* che si presta molto bene alla misura di temperatura dato il legame esistente fra la e e la differenza di temperatura fra i due punti.

5.2.2 Caratteristiche di una termocoppia.

La curva caratteristica di una termocoppia è la curva che viene ricavata mantenendo una delle giunzioni ad una temperatura t_0 costante (ad esempio al punto del ghiaccio), portando l'altra a temperature successive t note, e misurando le f.e.m. e corrispondenti.

Il giunto della coppia posto nel ghiaccio fondente viene detto *giunto caldo o di misura*.

Si definisce *potere termoelettrico* π della coppia l'espressione

$$\pi = \frac{de}{dt} \quad (5.1)$$

che fornisce il valore della tangente locale alla curva caratteristica.

In generale si osserva sperimentalmente che esiste una temperatura t_i in corrispondenza della quale si ha $\pi = 0$; per temperature maggiori di t_i , π diviene negativo. La t_i viene detta, secondo le norme del C.T.I., *temperatura d'inversione*: la coppia dovrà perciò essere impiegata per $t < t_i$. Detta t_0 la temperatura cui si trova il giunto di riferimento, la caratteristica della termocoppia può evidentemente esprimersi mediante la legge generale:

$$e = (t - t_0)f(t, t_0) \quad (5.2)$$

dove la funzione $f(t, t_0)$ può essere anche molto complessa: molte volte, almeno nel suo tratto iniziale la caratteristica può con buona approssimazione essere assunta lineare per cui l'eq. 5.2 diviene

$$e = \pi_m(t - t_0) \quad (5.3)$$

dove π_m è il potere termoelettrico medio della coppia.

Per misure più precise occorrono leggi più complesse.

5.2.3 Legge delle temperature successive.

Questa legge, dovuta al Becquerel, può così esprimersi .

Se una termocoppia sviluppa una f.e.m. e_1 quando i giunti sono posti alle temperature rispettivamente t_1 e t_2 , ed una f.e.m. e_2 quando i giunti sono posti rispettivamente alle temperature t_2 e t_3 , essa svilupperà una f.e.m. $e_3 = e_1 + e_2$ qualora i giunti siano posti rispettivamente alle temperature t_1 e t_3 . Si può perciò scrivere

$$e(t_1, t_3) = e(t_1, t_2) + e(t_2, t_3) \quad (5.4)$$

Questa legge è importante agli effetti dell'impiego della coppia perchè permette il suo uso senza disporre di un termostato al punto del ghiaccio fondente, ponendo semplicemente il giunto di riferimento a temperatura ambiente t_a nota. In tal caso, detta t la temperatura da misurare, la eq. 5.4 diviene

$$e(0, t) = e(0, t_a) + e(t_a, t) \quad (5.5)$$

per cui in definitiva per ottenere la temperatura effettiva, ammessa la eq. 5.3, si deve sommare semplicemente la t_a alla indicazione fornita dalla termocoppia.

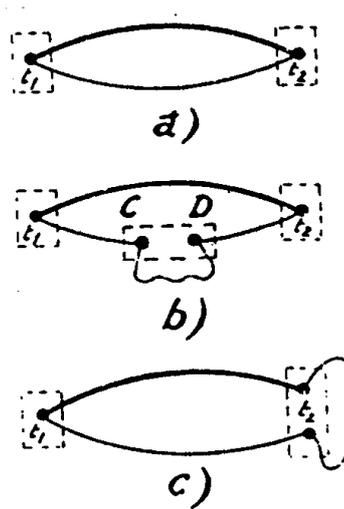


Figura 5.10:

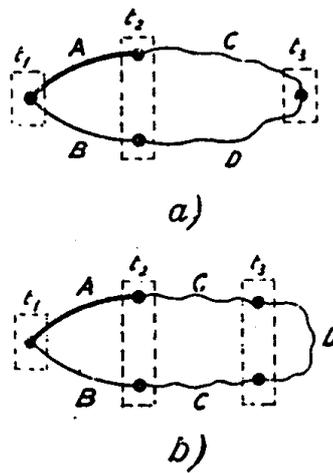


Figura 5.11:

5.2.4 Legge dei metalli interposti.

L'inserzione nel circuito di una termocoppia di un terzo metallo non altera la f.e.m. e, a patto che le due nuove giunzioni dovute alla presenza del terzo metallo siano alla medesima temperatura.

Nella Fig. 5.10 in a) è riportato lo schema teorico di una coppia termoelettrica, in b) l'inserzione nella coppia di un filo di un terzo metallo lungo uno dei due fili originari, lecita, per quanto detto, se i giunti C e D sono alla medesima temperatura. È questo il caso dell'inserzione di un galvanometro, ovviamente necessario per poter effettuare la lettura.

Infine in c) il terzo filo è inserito fra i due fili originari in corrispondenza di un giunto; in tal caso si può ritenere che quest'ultimo sia costituito dalle due giunzioni nelle quali è stato sdoppiato. Ciò rende possibile tra l'altro di effettuare la saldatura con un materiale di apporto diverso dai precedenti (stagno, ottone, ecc.), o di inserire in questo punto lo strumento di misura.

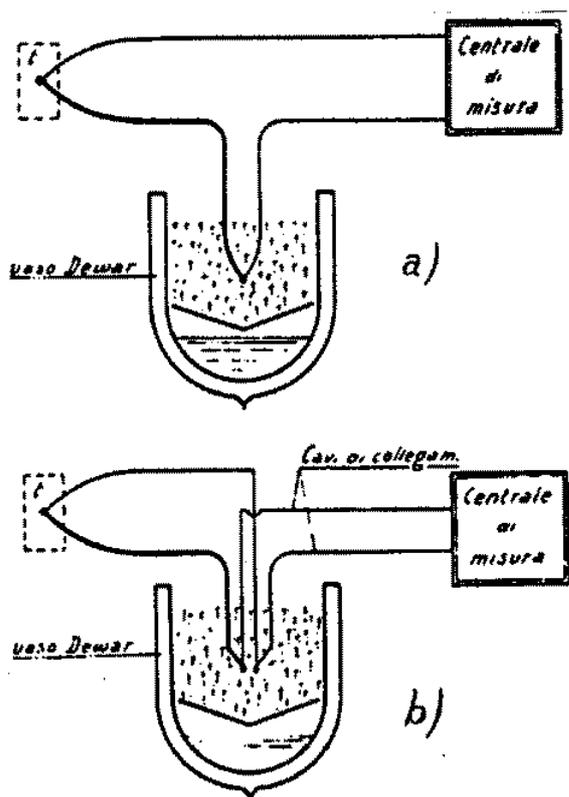


Figura 5.12:

Si abbia ora la coppia di Fig. 5.11a) nella quale, in corrispondenza del giunto a temperatura t_2 , sono stati introdotti due nuovi cavi C e D collegati tra loro, e tale nuova giunzione sia posta alla temperatura t_3 .

Indicando con $e_{AB}(t_1, t_2)$ la f.e.m. generata dalla coppia originaria AB e con $e_{CD}(t_2, t_3)$ la f.e.m. generata dalla coppia costituita dai cavi C e D, la f.e.m. e totale presente nel circuito di Fig. 5.11a) varrà ovviamente

$$e = e_{AB}(t_1, t_2) + e_{CD}(t_2, t_3) \quad (5.6)$$

Da tale formula si nota come, affinché l'inserzione dei due metalli C e D non alteri l'indicazione della coppia, occorre alternativamente che t_2 sia uguale a t_3 , oppure che i due cavi siano del medesimo metallo.

Occorrerà perciò evitare di inserire più cavi di materiale diverso secondo tale schema se non si è sicuri che $t_2 = t_3$.

Se invece l'inserzione dei due metalli C e D è fatta secondo lo schema di Fig. 5.11b), allora basta che la temperatura dei due nuovi giunti sia la medesima, pur essendo $t_3 \neq t_2$, affinché, per la legge prima esposta, l'indicazione non venga alterata. È perciò possibile inserire cavi di materiale diverso secondo tale schema anche per $t_2 \neq t_3$.

5.2.5 Circuiti e metodi di misura.

La misura della f.e.m. fornita da una coppia termoelettrica viene effettuata o attraverso la misura della corrente circolante direttamente con un galvanometro o, più generalmente, con l'ausilio di un circuito potenziometrico che permette misure per azzeramento (vedi metodi potenziometrici), o con soluzioni elettroniche.

I metodi di laboratorio per l'impiego di termocoppie implicano, data la elevata precisione generalmente richiesta, l'uso di un bagno d'acqua e ghiaccio (possibilmente in un termostato normalizzato) per mantenere la temperatura del giunto di riferimento rigorosamente costante. Gli schemi comunemente usati sono riportati in Fig. 5.12.

Lo schema in a) può essere adattato qualora la termocoppia non debba essere installata molto lontana dalla strumentazione di misura e i materiali della termocoppia non siano molto costosi. In caso contrario si ricorre allo schema in b) che del resto è il più usato, nel quale i cavi in rame (*cavi di collegamento*) essendo meno costosi e appositamente costruiti allo scopo, permettono un più facile ed economico collegamento alla strumentazione.

Per l'impiego industriale delle termocoppie il bagno di acqua e ghiaccio non viene quasi mai adottato e si ricorre perciò agli schemi di Fig. 5.13, dove con t_a si indica la temperatura ambiente.

In ogni caso occorre effettuare la misura della temperatura a cui trovasi il giunto di riferimento che, per la legge delle temperature successive, dovrà essere aggiunta a quella indicata dallo strumento per ottenere la temperatura del giunto di misura. Alcuni circuiti permettono la correzione automatica della lettura.

Se si desidera aumentare l'intensità del segnale, qualora quest'ultimo sia troppo debole, si può ricorrere a più termocoppie disposte in serie, coi giunti di riferimento tutti alla medesima temperatura. Più rara l'applicazione di termocoppie in parallelo per ottenere un valore medio della temperatura misurata in vari punti.

Per ridurre ulteriormente il costo dello strumento e per poter ancora più facilmente collegare fra loro gli elementi del circuito, si può ricorrere allo schema di Fig. 5.14 dove sono stati introdotti due cavi (*cavi di prolungamento o di compensazione*) tra i fili della coppia e il giunto di riferimento.

I materiali costituenti i due cavi di compensazione vanno scelti in modo da fornire al giunto freddo una f.e.m. di contatto molto vicina a quella che sarebbe prodotta dai fili della coppia e in modo che le f.e.m. ai giunti 1 e 2 siano trascurabili; naturalmente occorre che le giunzioni 1 e 2 siano alla medesima temperatura. Così facendo l'errore viene ridotto al minimo: si ottiene per contro il vantaggio, oltre a quello di un minor costo, di impiegare fili più adatti ad un collegamento elettrico, in quanto i cavi di prolungamento qualora si facessero funzionare come giunto di riferimento le giunzioni 1 e 2.

Tali giunzioni si trovano però ad una temperatura che, data la vicinanza della sorgente di calore, può subire variazioni notevoli e incontrollate per cui si preferisce in genere ricorrere allo schema della Fig. 5.14

Nella Tabella I sono descritti alcuni tipi di termocoppia; si noti che i tipi B e G sono non lineari al punto che il coefficiente di temperatura medio non può essere specificato.

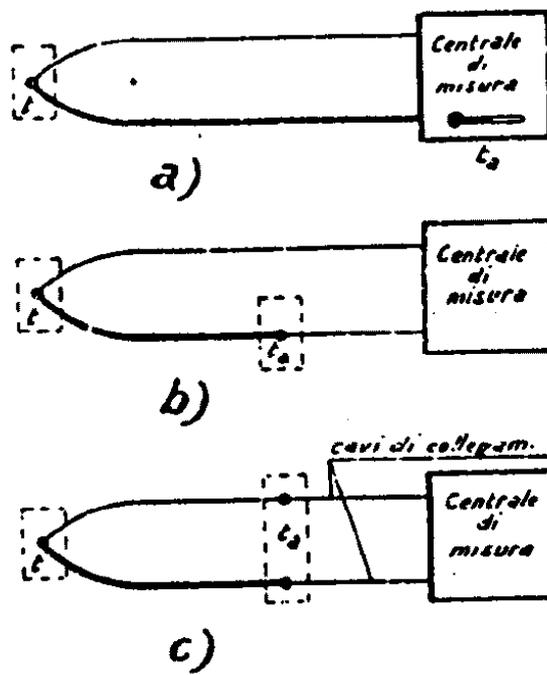


Figura 5.13:

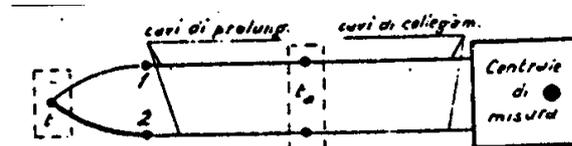


Figura 5.14:

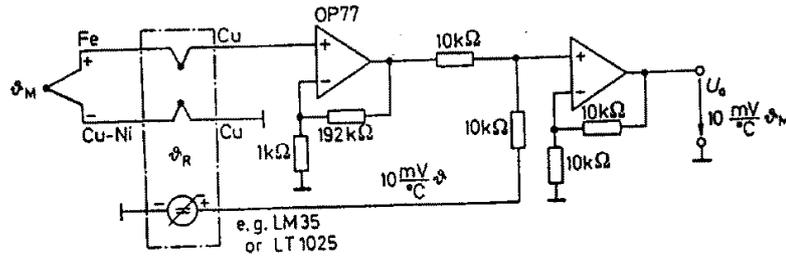


Figura 5.15:

Tabella I.-Esempi di termocoppie .

Type	Metallo 1	Metallo 2	coeff. di temperatura medio	Range di temperatura di utilizzo
T	Rame	Costantana	$48.2 \mu V/^{\circ}C$	$-200 \div + 400^{\circ}C$
J	Ferro	Costantana	$51.7 \mu V/^{\circ}C$	$-200 \div + 700^{\circ}C$
E	Cromo	Costantana	$60.9 \mu V/^{\circ}C$	$-200 \div + 1000^{\circ}C$
K	Cromo	Alluminio	$40.5 \mu V/^{\circ}C$	$-200 \div + 1300^{\circ}C$
S	Platino	Platino - 10% Rodio	$6.4 \mu V/^{\circ}C$	$0 \div + 1500^{\circ}C$
R	Platino	Platino - 13% Rodio	$6.4 \mu V/^{\circ}C$	$0 \div + 1600^{\circ}C$
B	Platino - 6% Rodio	Platino - 30% Rodio		$0 \div + 1800^{\circ}C$
G	Tungsteno	Tungsteno - 26% Renio		$0 \div + 2800^{\circ}C$
C	Tungsteno - 5% Renio	tungsteno - 26% Renio	$15 \mu V/^{\circ}C$	$0 \div + 2800^{\circ}C$

Per l'interfacciamento di una termocoppia posso utilizzare un blocco isotermico con una temperatura di riferimento θ_R . Per valutare la tensione termoelettrica, deve essere aggiunta una tensione corrispondente alla temperatura di riferimento θ_R . Questa correzione può essere effettuata come mostrato in Fig. 5.15 dopo lo stadio di amplificazione. Questo è stato ottenuto con un circuito ad amplificatori operazionali in configurazione non invertente. Il primo amplificatore ha il compito di riportare il coefficiente di temperatura della giunzione ferro-costantana, ad un coefficiente confrontabile con quello legato al riferimento che è pari a $10 \text{ mV}/^{\circ}C$.

$$A = \frac{10 \text{ mV}/^{\circ}C}{51.7 \mu \text{V}/^{\circ}C} = 193 \quad (5.7)$$

Nella relazione è stato inserito un coefficiente di temperatura medio di $51.7 \mu \text{V}/^{\circ}C$ che è quello relativo alla termocoppia nello schema utilizzata (ferro-costantana). Il secondo amplificatore ha guadagno unitario e provvede ad isolare le tensioni misurate permettendone la lettura. All'ingresso dell'operazionale abbiamo la somma di $10 \text{ mV}/^{\circ}C(\theta_M - \theta_R)$ e $10 \text{ mV}/^{\circ}C(\theta_R)$ quindi, come volevamo, una tensione proporzionale alla temperatura da misurare: $10 \text{ mV}/^{\circ}C(\theta_M)$.

La Fig. 5.16 illustra il principio alternativo per mezzo del quale il valore relativo al punto di ghiaccio è sommato alla f.e.m. della termocoppia prima dello stadio amplificatore.

In Fig. 5.17 è mostrato un interfacciamento tramite amplificatore integrato per termocoppie.

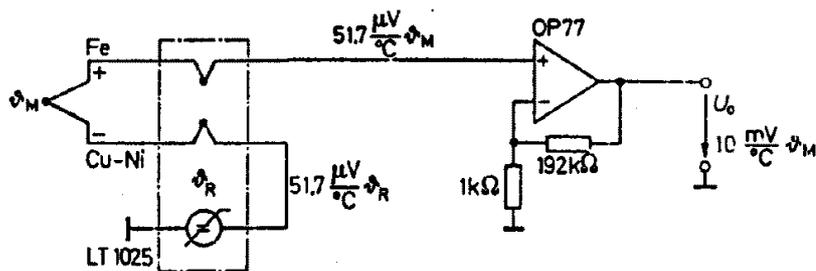


Figura 5.16:

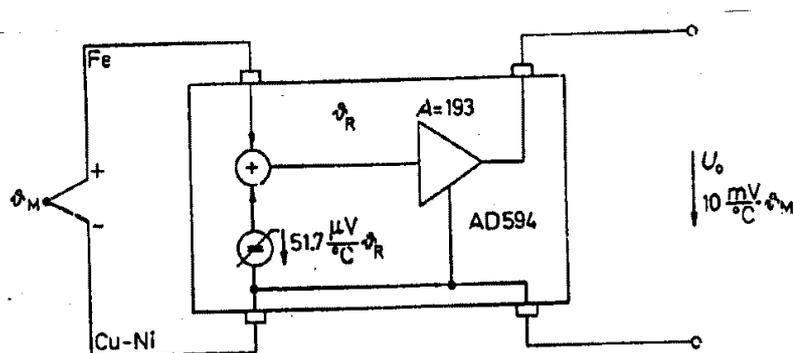


Figura 5.17:

Si nota che i fili della termocoppia sono connessi direttamente al circuito integrato .

5.2.6 Serie termoelettrica.

Dalle norme del C.T.I. riportiamo la Tabella II nella quale viene fornito per ogni materiale il valore (inteso come valore medio di quelli che si trovano nella letteratura sull'argomento) della f.e.m. che viene generata quando il materiale in esame costituisce una coppia termoelettrica col platino e quando una giunzione è mantenuta a $0^{\circ}C$ (punto del ghiaccio) e l'altra a $100^{\circ}C$ (punto dell'acqua bollente).

A questa f.e.m. viene assegnato per convenzione il segno + quando è tale per cui al giunto caldo la corrente passa dal metallo considerato al platino. Il valore della f.e.m. diviso per 100 equivale al potere termoelettrico medio π_m fra 0 e $100^{\circ}C$ della coppia costituita dal materiale e dal platino.

Una coppia costituita da due metalli generici della serie avrà una f.e.m. uguale alla differenza algebrica fra i valori indicati per i rispettivi metalli. Ne risulta anche che uno dei due metalli è positivo rispetto all'altro. Nell'indicare la coppia si indica di norma per primo il metallo positivo, e ciò sta a significare che, per quanto detto prima, al giunto caldo la corrente passa dal primo metallo elencato al secondo. I valori della f.e.m. indicati nella tabella sono però solo orientativi in quanto fortemente influenzati dalla purezza del metallo.

Nella scelta dei metalli per le termocoppie intervengono varie considerazioni. Fra di esse citiamo: a) la coppia deve fornire una f.e.m. sufficientemente elevata, che aumenti monotonamente con la temperatura (possibilmente in modo lineare) e che rimanga costante nel tempo: b) sia ottenibile sotto forma di

fili di sufficiente resistenza meccanica a costo relativamente basso: c) sia ottenibile con una sufficiente purezza, per garantire la stabilità del materiale, sia nel tempo, sia a temperature elevate.

Speciali trattamenti termici sono previsti per rendere più stabile la coppia (ad esempio riscaldamento al calor rosso per almeno un'ora).

5.2.7 Termocoppie di uso più frequente.

Le termocoppie più frequentemente usate nella pratica corrente sono le seguenti.

1. *Coppia Fe/Costante*.-Presenta i vantaggi di un basso costo e di una notevole f.e.m. La temperatura di impiego va da -250°C a 500°C .
A 500°C incomincia l'ossidazione del ferro e a 600°C quella della costante. con i fili di diametro superiore ai 3 mm si può rimanere a 800°C per circa 300 ore, e a 900°C per circa 120 ore. L'atmosfera ossidante o riducente ha scarsa influenza sulla precisione della misura.
Come fili di compensazione possono usarsi fili di Fe e Costante scartati dall'impiego come termocoppie.
2. *Coppia NiCr/Ni*.-Fornisce una f.e.m. inferiore a quella della coppia Fe/Costante. La temperatura di funzionamento raggiunge i 900°C e, con fili di diametro superiore ai 3 mm, anche fino a 1300°C . A partire da $350 \div 400^{\circ}\text{C}$ occorre prevedere una opportuna protezione chimica contro eventuali gas corrosivi.
Il ramo di Ni non è di nichel (si altererebbe ad elevata temperatura) ma di lega contenente almeno il 94% di Ni.
Quali fili di compensazione possono impiegarsi un filo di Fe o di Cu e uno di Costante.
3. *Coppia Cu/Costante*.-Presenta proprietà e caratteristiche di impiego simili a quella di Fe/Costante.
Come cavi di prolungamento è generale l'impiego di fili di Cu e Costante scartati dall'impiego come termocoppie.
4. *Coppia NiCr/Costante*.-Fra le coppie di uso corrente sono quelle che forniscono la f.e.m. più elevata. Il costo e le temperature di funzionamento sono intermedie fra le coppie Fe/Costante e NiCr/Ni.
5. *Coppia Chromel/Alumel*.-La lega Chromel è costituita da Ni(89%), Cr(9.8%), Fe(1%), Mn(0.2%), mentre la lega Alumel è composta da Ni(94%), Al(2%), Si(1%), Fe(0.5%), Mn(2.5%). Il comportamento è molto simile a quello delle coppie NiCr/Ni ma sono di maggior costo: in compenso presentano una maggior costanza, linearità e danno misure di maggior precisione. Si possono raggiungere i 1300°C con maggior tranquillità. Come fili di prolungamento vengono impiegati cavi di Cu e Costante.
6. *Coppia PtRh/Pt*.-Questa coppia risulta di notevole costo e fornisce una f.e.m. non molto elevata; in compenso presenta una notevole stabilità e sicurezza di impiego e permette misure fino anche a 1600°C . Deve essere protetta accuratamente da possibili agenti chimici (gas e vapori).

Materiali	f.e.m. [mV]
Bismuto parallelo all'asse	-7.7 ÷ -7.2
Bismuto perpendicolare all'asse	-5.2
Costantina (55Cobalto)	-1.99 ÷ -1.52
Nichel	-1.94 ÷ -1.20
Palladio	-0.28
Platino	0
Mercurio	-0.07 ÷ +0.04
Grafite	+0.22
Tantalio	+0.34 ÷ +0.51
Stagno	+0.40 ÷ +0.44
Piombo	+0.41 ÷ +0.46
Magnesio	+0.40 ÷ +0.43
Alluminio	+0.37 ÷ +0.41
Tungsteno	+0.65 ÷ +0.90
Platinorodio (da 10Argento)	+0.67 ÷ +0.79
Rame	+0.72 ÷ +0.77
Zinco	+0.60 ÷ +0.76
Manganina (Cu, Mn, e Ni)	+0.57 ÷ +0.82
Iridio	+0.65 ÷ +0.68
Oro	+0.50 ÷ +0.80
Cadmio	+0.85 ÷ +0.92
Molibdeno	+1.16 ÷ +1.31
Ferro	+1.87 ÷ +1.89
Nichelcromo (90Antimonio)	+4.70 ÷ +4.86
Germanio	+33.9
Silicio	+44.8
Tellurio	+50

Per temperature molto elevate possono essere impiegate termocoppie speciali quali: *iridio-rodio/iridio* (fino a $2000^{\circ}C$), *tungsteno/molibdeno* (fino a $2000^{\circ}C$), *tungsteno/iridio* (fino a $2100^{\circ}C$), *tungsteno/grafite* (fino a $1650^{\circ}C$), *grafite/carburo di boro* (fino a $2500^{\circ}C$).

Le saldature tra i fili al giunto di misura vengono in genere effettuate in uno dei modi esposti in Fig. 5.18.

5.2.8 Protezione delle termocoppie.

Le protezioni che possono rendersi necessarie per una termocoppia sono essenzialmente tre: elettrica, chimica, meccanica.

La *protezione elettrica* è necessaria quando è possibile che i fili della termocoppia vengano a contatto fra di loro: in tal caso si ricorre ad uno dei sistemi riprodotti in Fig. 5.19.

In a) si impiegano anellini di materiale isolante infilati su fili; in b) gli anelli sono singoli con due fori nei quali passano i fili della coppia; in c) infine l'isolamento è continuo, eventualmente realizzato in

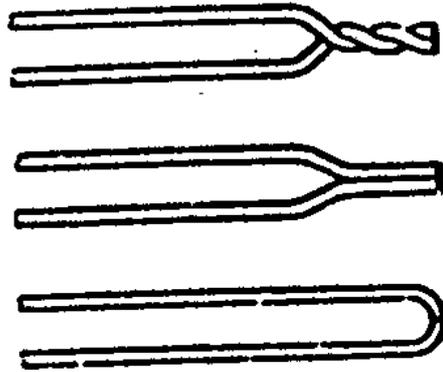


Figura 5.18:

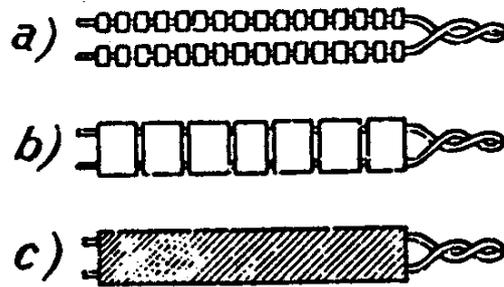


Figura 5.19:

materiale flessibile.

Il materiale isolante varia a seconda della temperatura e può andare dalla seta all'amianto.

La *protezione chimica* va impiegata ogni qualvolta vi è pericolo che i fili della coppia siano intaccati da agenti chimici presenti nell'ambiente, o anche quando i vapori che vengono emanati da uno dei fili possono essere assorbiti dall'altro; è quest'ultimo il caso caratteristico della coppia PtRh/Pt nella quale, a temperatura elevata (sopra i 1000°C), il Rh sublima e può inquinare il filo di platino.

Per questo tipo di protezione vengono usati tubi di quarzo, porcellana, magnesio, carborundum, grafite, ecc. a seconda della temperatura e degli agenti chimici.

La *protezione meccanica* è costituita da tubi di metalli vari (ferro, acciaio, alluminio, ecc.) nei quali viene alloggiata la termocoppia.

5.3 Sensori di temperatura a resistenza elettrica

5.3.1 Generalità.

Nei termometri a resistenza si sfrutta il fenomeno della variazione della resistenza elettrica in funzione della temperatura in alcuni materiali: questi ultimi possono suddividersi, da questo punto di vista, in due gruppi di caratteristiche e proprietà completamente differenti, e precisamente i *metalli* e i *semiconduttori*, questi ultimi così chiamati perchè hanno resistenza elettrica intermedia fra quella dei materiali conduttori e quella dei materiali isolanti.

I termometri a resistenza elettrica metallici sono normalmente indicati come *termometri a resistenza*, mentre quelli a semiconduttori assumono il nome di *termistori*.

5.3.2 Materiali e caratteristiche dei termometri a resistenza.

I metalli impiegati nella costruzione dei termometri a resistenza devono rispondere ad alcuni requisiti quali : coefficiente di temperatura elevato, stabilità nel tempo, resistenza elettrica complessiva abbastanza elevata, caratteristica resistenza-temperatura il più possibile vicina alla linearità.

In pratica, tenuto conto di queste esigenze, i metalli che vengono impiegati sono quasi esclusivamente il *platino*, il *nichel*, il *rame*.

Le caratteristiche R/R_0 (dove R è la resistenza alla temperatura t e R_0 quella a 0°C) in funzione della temperatura per tali metalli sono riportate in Fig. 5.20.

Detta R_{100} la resistenza a 100°C , si definisce coefficiente medio di temperatura fra 0°C e 100°C il valore

$$\alpha = \frac{R_{100} - R_0}{100R_0} \quad (5.8)$$

Esso vale:

per il platino $\alpha_m = 3.8510^{-3}\Omega/\Omega^\circ C$
 per il nichel $\alpha_m = 6.1810^{-3}\Omega/\Omega^\circ C$
 per il rame $\alpha_m = 4.2110^{-3}\Omega/\Omega^\circ C$

Per misure di tipo industriale si può ritenere lineare la relazione fra R/R_0 e t : si può scrivere

$$R = R_0(1 + \alpha_m t) \quad (5.9)$$

Per misure di maggiore precisione occorre assumere leggi più complesse, come avviene per il termometro a resistenza destinato a realizzare la scala internazionale delle temperature.

Le temperature di normale impiego sono le seguenti:

platino.....da -200 a 600° C
 nichel.....da -100 a 200° C
 rame.....da -100 a 150° C

Il platino, malgrado il coefficiente di temperatura inferiore a quello del nichel e del rame, e malgrado il suo prezzo elevato, è il metallo più impiegato per i notevoli vantaggi che esso presenta: è inattaccabile dagli

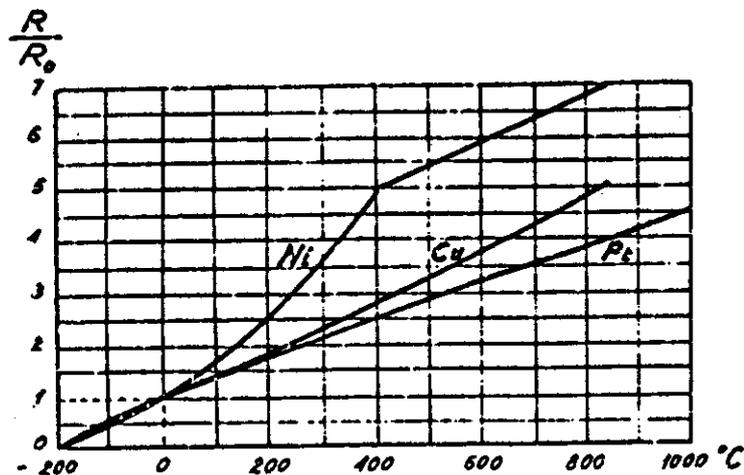


Figura 5.20:

agenti chimici, ha un punto di fusione molto elevato per cui può in casi eccezionali essere impiegato fino a 1000 °C, ha una caratteristica abbastanza lineare, può essere ottenuto con un grado di purezza molto elevato e risulta molto stabile nel tempo. Ricordiamo che appunto in platino è il termometro primario richiesto dalla scala internazionale.

5.3.3 Conformazione dei termometri a resistenza.

Il metallo viene generalmente impiegato sotto forma di filo. Questo viene avvolto su un supporto di materiale elettricamente isolante (in genere ceramico) che può essere cilindrico, a sezione circolare o a croce, o piatto, oppure può essere montato su un supporto simile a quello degli estensimetri a resistenza elettrica.

È in genere necessaria anche una protezione esterna, pure isolante.

Si hanno anche termometri costituiti da lamine sottili rettangolari in platino, destinati a misure di temperature di superfici.

Le dimensioni di ingombro di questi termometri possono variare notevolmente potendo essere realizzati i più piccoli sotto forma di cilindretti del diametro di 3 mm e della lunghezza di 30 mm, i più grandi sottoforma di grosse sonde pirometriche per forni (Fig. 5.21): in quest'ultimo caso è però da notare che l'elemento sensibile vero e proprio è di dimensioni molto minori occupando solo la parte terminale della sonda.

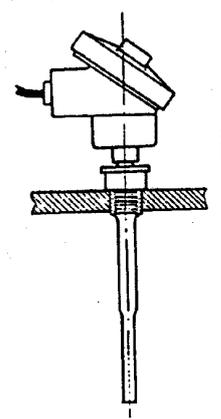


Figura 5.21:

5.3.4 Termistori.

I termistori sono costituiti da materiali semiconduttori (quali il germanio, il silicio, ecc. in presenza di piccole quantità di impurità) la cui resistenza varia con la temperatura con una legge che può, con buona approssimazione, assumersi esponenziale del tipo

$$R_T = ae^{\frac{b}{T}} \quad (5.10)$$

dove R_T è la resistenza alla temperatura assoluta T , a un coefficiente dipendente dalla forma e dalle dimensioni del termistore, b un coefficiente dipendente dal materiale. La resistenza, al contrario dei metalli, diminuisce perciò con l'aumentare della temperatura.

La costante a presente nella eq. 5.10 può essere eliminata introducendo il valore della resistenza R_0 a una temperatura T_0 di riferimento, per cui si ha

$$R_T = R_0 e^{\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}} \quad (5.11)$$

La costante di temperatura α del semiconduttore vale

$$\alpha(T) = \frac{1}{R} \frac{dR}{dT} = -\frac{b}{T^2} \quad (5.12)$$

o anche

$$\alpha(T) = \alpha(T_0) \frac{T_0^2}{T^2} \quad (5.13)$$

Un termistore può perciò venir definito mediante il valore della resistenza e della costante α ad una data temperatura (in genere 25 °C).

La costante α varia a seconda del materiale fra 0,05 e 0,012 $\Omega/\Omega^\circ C$ e diminuisce con la temperatura, per cui i termistori risultano più sensibili alle basse temperature che non alle alte, come del resto è ovvio data la struttura della eq. 5.13; inoltre essi risultano più sensibili dei termometri a resistenza metallica.

I termistori di tipo classico possono essere impiegati fra -100 °C e +400 °C; alcuni tipi speciali possono però arrivare anche fino a 1200 °C.

5.3.5 Protezione dei termometri a resistenza.

I termometri a resistenza devono essere adeguatamente protetti, specie alle alte temperature, dagli agenti chimici che possono danneggiarli e alterarne le caratteristiche. A tale scopo si impiegano guaine di vetro, di ceramica o anche metalliche, a patto che il metallo non venga a contatto col filo. Meglio ancora, per le sonde pirometriche la doppia protezione vetro, o ceramica, e guaina metallica.

5.3.6 Circuiti di misura e precisioni raggiungibili.

Le variazioni di resistenza del termometro vengono misurate con un circuito potenziometrico o a ponte. Notiamo solo che per misure di grande precisione si rende necessario tener conto del riscaldamento per effetto Joule prodotto dalla corrente che passa nella resistenza. Nel caso di misure effettuate con strumenti di tipo industriale si hanno precisioni dell'ordine : per il platino di $\pm 0,5$ °C a 100 °C, di $\pm 0,8$ °C a 150 °C, e di ± 3 °C a 500 °C; per il nichel di ± 1 °C a 100 °C, e di $\pm 1,4$ °C a 150 °C. Per misure di tipo industriale può impiegarsi anche un ohmetro a bobine incrociate.

5.3.7 Schema di utilizzo di un sensore resistivo

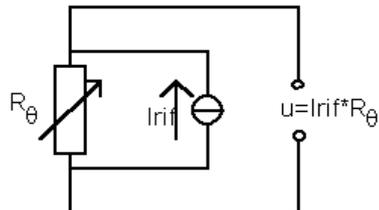


Figura 5.22: Schema di utilizzo di un sensore resistivo

Eventuali resistenze nel circuito di misura della corrente non hanno effetto, così come la resistenza nel circuito di lettura della tensione, poichè tale lettura è fatta a circuito aperto. Si introduce una resistenza di linearizzazione :

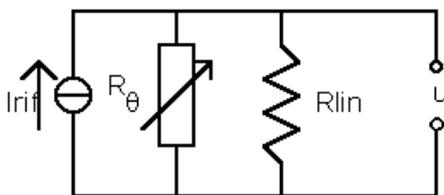


Figura 5.23: Introduzione della resistenza di linearizzazione

$$u = I_{rif} R_{lin} \parallel R_{\theta}$$

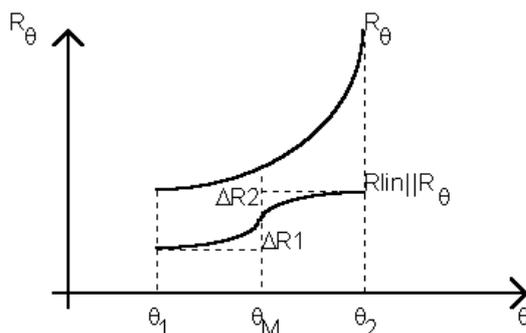


Figura 5.24: Grafico

Imponiamo $\Delta R_1 = \Delta R_2$

$$R_1 = R(\theta = \theta_1), \quad R_2 = R(\theta = \theta_2), \quad R_M = R(\theta = \theta_M)$$

$$\Delta R_1 = \frac{R_{lin} R_M}{R_{lin} + R_M} - \frac{R_{lin} R_1}{R_{lin} + R_1} = \Delta R_2 = \frac{R_{lin} R_2}{R_{lin} + R_2} - \frac{R_{lin} R_M}{R_{lin} + R_M}$$

Avrò una relazione di secondo grado (ma una soluzione è $R_{lin} = 0$)

$$r_{lin} = \frac{R_M(R_1 + R_2) - 2R_1R_2}{R_1 + R_2 - 2R_M} \implies \text{stabilisco il valore della resistenza di compensazione}$$

La variazione di resistenza sarà dunque distribuita linearmente. $R \parallel (\theta_M)$ sarà valor medio di $R \parallel_1$ e $R \parallel_2$. (v.fotocopia 11; 26.4,6,7)

In figura 26.5a,b sono indicati due possibili schemi di linearizzazione. Inseriremo nel circuito un amplificatore per non caricare la tensione ai capi della resistenza e per riportare la scala dell'uscita tra 0 e 2 volt : usiamo lo schema in figura 26.8. Vogliamo determinare le resistenze R_1, R_2, R_3 in modo tale che la tensione di misura sia 0V a 0C e 2V a 100C.

$$\begin{aligned} i_1 &= i_2 + i_3 \\ i_1 &= \frac{U_\theta}{R_1} = \frac{V_{ref} - U_\theta}{R_2} + \frac{U_{mis} - U_\theta}{R_3} \\ U_{mis} &= U_\theta R_3 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) - V_{ref} \frac{R_3}{R_2} \end{aligned}$$

(Le tensioni alle quali ci riferiamo sono opposte a quelle indicate in fotocopia)

$$U_{mis} = U_{theta} \left(1 + \frac{R_3}{R_1 \parallel R_2} \right) - V_{ref} \frac{R_3}{R_2}$$

Guadagno relativo a U_θ

$$A = \frac{U_{mis-alto} - U_{mis-basso}}{U_{\theta-alto} - U_{\theta-basso}} = \frac{2V}{0.935 - 0.555} \text{ (fig. 26.9) } = 5.26 (*)$$

L'altra condizione da imporre è $U_{mis} = 0$ per $T = 0^\circ C$; quindi :

$$\left(1 + \frac{R_3}{R_1 \parallel R_2} \right) U_{\theta-basso} - V_{ref} \frac{R_3}{R_2} = 0 (**)$$

(*) e (**) sono due vincoli per le tre resistenze R_1, R_2, R_3 : scegliamo $R_2 = R_{lin}$.

5.4 Circuiti di compensazione e misura per sensori a termistorei *

Dalla fig.26.12(fotoc.11) notiamo come la variazione della resistenza sia esponenziale, con buona approssimazione (dunque lineare nella scala semilogaritmica):

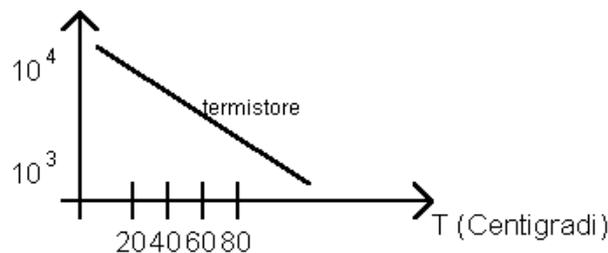


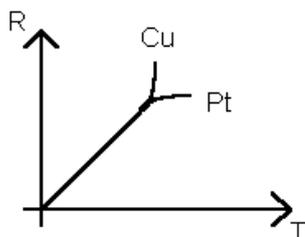
Figura 5.25: Grafico della variazione della resistenza

$$R(\theta) = R(T_0)e^{B\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right)}$$

Il valore della resistenza lineare è qui positivo. Ricorriamo allo schema circuitale (f.11, 26.13), dove si è provveduto ad invertire la posizione della R_{lin} con R cosicchè la funzione di uscita risulti crescente con la temperatura. (diminuisce R , quindi aumenta la caduta di tensione su R_{lin} ,..... - situazione opposta a prima) fig.26.8 : PTC --- 26.13 : NTC.

5.5 Circuiti di compensazione e misura per sensori resistivi al platino *

Consideriamo inizialmente la variazione di resistenza del rame e del platino, il primo mostra una concavità verso l'alto, il secondo verso il basso \Rightarrow la resistenza di linearizzazione del platino dovrebbe essere minore di zero:



Consideriamo il seguente schema :

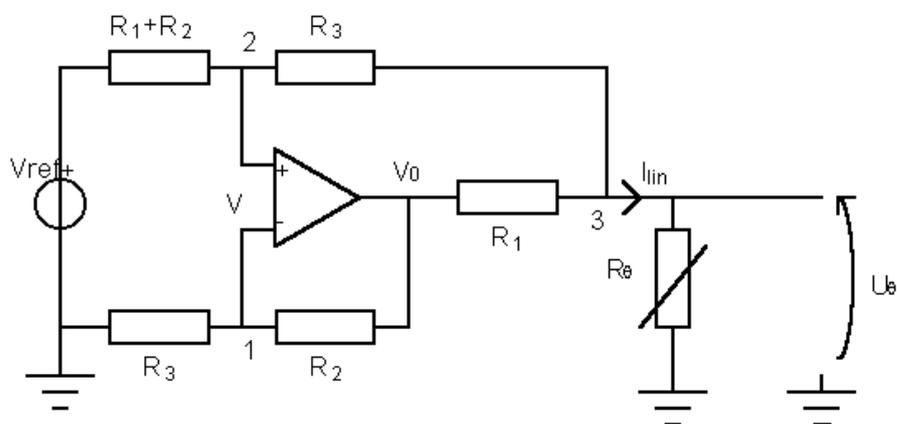


Figura 5.26:

Tutto ciò serve per realizzare la resistenza lineare negativa : a questo schema seguirà quello di misura visto in precedenza. Al nodo 1 abbiamo che :

$$\frac{V_0 - V}{R_2} = \frac{V}{R_3}$$

Al nodo 2 :

$$\frac{V_{ref} - V}{R_1 + R_2} = \frac{V - U_\theta}{R_3}$$

Al nodo 3 :

$$\frac{V_0 - U_\theta}{R_1} + \frac{V - U_\theta}{R_3} = I_{lin}$$

Abbiamo poi che

$$I_{lin} = \frac{V_{ref}}{R_1} + \frac{R_2^2 - R_3^2}{R_1 R_3 (R_2 + R_3)} U_\theta$$

se $R_2 = R_3$ l'impedenza è nulla (rispetto a U_θ), mentre per $R_2 > R_3$ abbiamo la resistenza negativa.

$$r_{diff} = -\frac{\Delta U_\theta}{\Delta I_{lin}} = -\frac{R_1 R_3 (R_2 + R_3)}{R_2^2 - R_3^2} = +R_{lin} \quad \leftarrow \text{determinata secondo il criterio di compensazione}$$

$$\left[V_{ref} - R_{lin} I_{lin} = U_\theta ; \quad \Delta V_{ref} - R_{lin} \Delta I_{lin} = \Delta U_\theta ; \quad R_{lin} = -\frac{\Delta U_\theta}{\Delta I_{lin}} \right]$$

Realizziamo la sorgente di tensione compensata:

5.6 Transistori come sensori di temperatura *

(f. 11,26.14)

La variazione di U_{BE} (opposta a quella in figura) con la temperatura è di $-\frac{2mV}{^\circ K}$. Questa relazione è molto variabile da un transistor all'altro, quindi si renderà necessario uno schema più elaborato: f.11,26.16 (consideriamo tensioni opposte a quelle indicate nel grafico). $I_c = (\text{area emettitore})(\text{corrente di saturazione}) \exp(U_{be}/V_t)$.

$$\begin{aligned} I_c &= A J_{cs} e^{\frac{U_{BE}}{V_T}} & V_T &= \frac{kT}{q} \\ \Delta U_{BE} &= U_{BE2} - U_{BE1} = V_T \ln \left(\frac{I_{c2}}{J_{cs} A_2} \right) - V_T \ln (I_{c1} J_{cs} A_1) \\ \Delta U_{BE} &= V_T \ln \left(\frac{I_{c2} A_1}{I_{c1} A_2} \right) = V_T \ln \left(\frac{A_1}{A_2} \right) \\ \Delta U_{BE} &= V_T \ln \left(\frac{A_1}{A_2} \right) = \frac{kT}{q} \ln \left(\frac{A_1}{A_2} \right) = \frac{k300^\circ}{q} \frac{T}{300^\circ} \ln \left(\frac{A_1}{A_2} \right) \\ A_1 &= 10 A_2 \implies \ln \left(\frac{A_1}{A_2} \right) = 2.3 \\ \Delta U_{BE} &= 200 \left(\frac{\mu V}{^\circ K} \right) \end{aligned}$$

Ai capi di R_2 ho una caduta $2R_2 I_c = 10I_c R_1 = 10\Delta U_{BE}$

$$U_{temp} = 2 \left(\frac{mV}{^\circ K} \right) T$$

Quando $T = 273^\circ K = 0^\circ C \implies U_{temp} = 546mV$

Questo circuito può essere utilizzato per la misura di temperatura, in particolare come sorgente di una tensione proporzionale alla temperatura. Vorremmo in particolare che U_{temp} sia nulla a zero °C.

$$\begin{aligned} \frac{dU_{BE}}{dT} &= \frac{U_{BE}}{T} - \frac{U_{BG}}{T} \\ (U_{BG} &= U \text{ Band Gap - banda proibita}) \\ U_{BE} &= U_{BG} - 2 \left(\frac{mV}{^{\circ}K} \right) T \\ U_{ref} &= U_{temp} + U_{BE} = U_{temp} + U_{BG} - 2 \left(\frac{mV}{^{\circ}K} \right) T \end{aligned}$$

(dimensionamenti tali che $U_{temp} = \frac{2mV}{^{\circ}K}$)

$$\implies U_{ref} = U_{BG}$$

Abbiamo a disposizione sul circuito un valore della tensione pari ad U_{BG} , questo ci da una tensione di riferimento : possiamo usare la sorgente costante U_{BG} e la tensione variabile U_{temp} per ottenere il circuito che realizza una proporzionalità con i gradi centigradi :

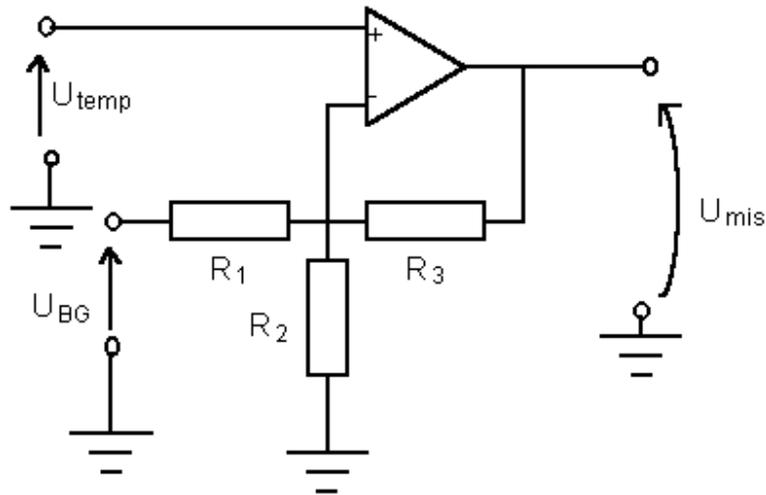


Figura 5.27: Circuito che realizza una proporzionalità con i gradi centigradi

$$\begin{aligned} \frac{U_{BG} - U_{temp}}{R_1} &= \frac{U_{temp}}{R_2} + \frac{U_{temp} - U_{mis}}{R_3} \\ U_{mis} &= R_3 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) U_{temp} - \frac{R_3}{R_1} U_{BG} \end{aligned}$$

Voglio $U_{mis} \propto 10 \frac{mV}{^{\circ}C} T$ e $U_{mis} = 0$ per $T = 273^{\circ}K$.

$$R_3 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) = 5$$

$$U_{mis} = 5U_{temp} - 2.22U_{BG}$$

5.7 Sensori di pressione

$$1 \text{ Pascal} = [Pa] = \frac{1 \text{ Newton}}{1 \text{ metro}^2} = \left[\frac{N}{m^2} \right], \quad \text{Bar} \cong 10^5 \text{ Pa}$$

Tipicamente nei sensori di pressione si impiegano tre passaggi di grandezza fisica :

Pressione → Deformazione → Variazione di Resistenza → Variazione di tensione

(nella fotocopia 12, fig. 26.34 a e b si notano rispettivamente un sensore di pressione differenziale e uno di pressione assoluta; in fig. 26.35 a e b è indicato un tipo di sensore composto da un filo a serpentina saldato ad un substrato ed integrato sulla superficie di un diaframma il quale è in grado di deformarsi, e di trasmettere al filo un effetto di allungamento o accorciamento che ne varia la resistenza; in fig. 26.36 è mostrato un circuito a ponte per la misura della pressione con il dispositivo di fig. 26.35).

5.8 Misure di deformazione

5.8.1 Generalità.

In questo capitolo vengono raggruppati e descritti gli strumenti impiegati per la misura delle deformazioni di elementi costruttivi sottoposti a carichi sia statici sia dinamici. In pratica, come vedremo, la misura che si effettua è quella della dilatazione $e_L = \frac{\Delta l}{l}$: ad ogni modo con dispositivi appositi può ricavarsi lo stato completo di deformazione o almeno il suo valore medio in una zona limitata della superficie del pezzo. Gli strumenti che misurano la dilatazione vengono detti *estensimetri*: essi sono sensibili, in genere, agli spostamenti relativi fra due punti della superficie lungo la direzione della loro congiungente. La distanza fra i due punti è fissata dall'estensimetro stesso, del quale è una caratteristica costruttiva, e viene detta *base* dell'estensimetro: dalla misura dello spostamento fra i punti delimitanti la base, si risale facilmente alla dilatazione media esistente nel tratto limitato dalla base stessa, e questo viene fatto tarando direttamente lo strumento. Ne deriva che è opportuno, qualora si abbiano a temere concentrazioni di sforzi in determinate zone, impiegare estensimetri con una base piccola, in modo da avvicinarsi il più possibile al valore locale reale della deformazione; per contro, minore è la base, maggiore è ovviamente l'amplificazione necessaria per ottenere la medesima sensibilità dello strumento, col rischio di aumentare eccessivamente gli errori, per cui in definitiva occorrerà di volta in volta scegliere il valore della base in modo da ottenere un compromesso accettabile fra le due esigenze. Gli estensimetri possono classificarsi, secondo il loro principio di funzionamento, come segue:

1. *estensimetri a resistenza elettrica*

2. *altri estensimetri*

- *estensimetri meccanici*
- *estensimetri acustici*
- *estensimetri pneumatici*
- *estensimetri ottici*

Gli estensimetri vanno mantenuti a contatto con la superficie dell'elemento, del quale si vogliono misurare le deformazioni, mediante viti, nastri o molle (ad eccezione di quelli a variazione di resistenza elettrica che vanno incollati con speciali collanti). Una buona precisione nella misura è quindi condizionata dal fatto che l'estensimetro segua fedelmente le deformazioni della superficie. Ove si possano escludere fenomeni che facciano temere concentrazioni locali di sollecitazioni (ad esempio di fatica), si può aiutare l'aderenza fra estensimetro e superficie, prevedendo delle piccole nicchie in corrispondenza dei coltelli (quando vi sono) coi quali l'estensimetro tocca il pezzo. Da tener presente che, con l'avvento degli estensimetri elettrici, gli altri tipi di estensimetri hanno perso molto della loro utilità: molti di essi sono caduti completamente in disuso, mentre altri, pur essendo meno usati, mantengono ancora una certa importanza per alcune peculiari proprietà. Un estensimetro di questo tipo è quello di figura 5.28, il cui funzionamento è ovvio. Con i dati in figura l'amplificazione dello strumento, per allungamenti limitati, vale (detta ΔL la lettura corrispondente allo spostamento Δl) $\frac{\Delta L}{\Delta l} = \frac{a}{b}$.

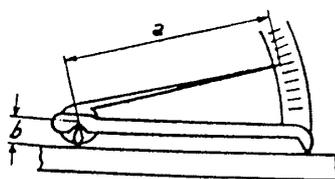


Figura 5.28:

5.8.2 Estensimetri a resistenza elettrica.

Gli estensimetri elettrici a resistenza consistono in un filo (figura 5.29 e figura 5.30) di lega speciale, di resistenza elettrica nota e di diametro molto piccolo (da 0.01 a 0.03mm), disposto a serpentina su un supporto di carta o resina sintetica al quale aderisce. Il supporto viene a sua volta incollato al pezzo nella zona nella quale si desidera conoscere la deformazione.

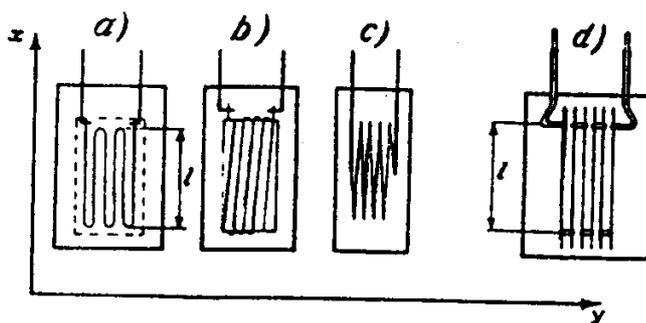


Figura 5.29:

Se, una volta incollato l'estensimetro, si mette il pezzo sotto carico, l'estensimetro seguirà le deformazioni del pezzo presentando le medesime dilatazioni di questo. Il filo viene perciò allungato o accorciato, e a seguito di ciò varia la sua resistenza elettrica a causa di due fenomeni: l'allungamento (o accorciamento) accompagnati da una diminuzione (o aumento) di sezione, e la variazione di resistività che si ha in un materiale al variare della sollecitazione. Per molti tipi di estensimetri a costante elevata

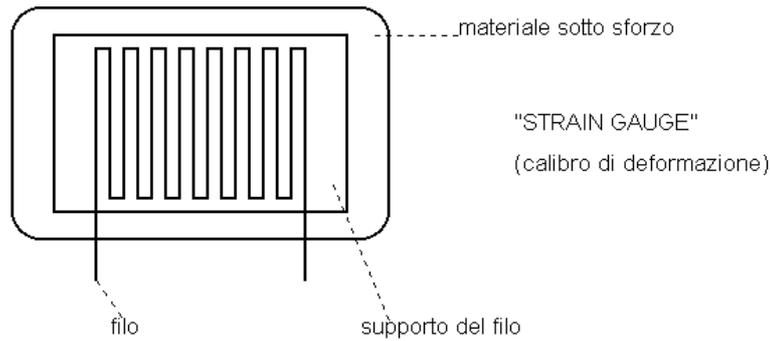


Figura 5.30: STRAIN GAUGE

tale fenomeno é preponderante. Data la conformazione dell'estensimetro, esso é molto sensibile alle dilatazioni lungo la direzione x , e poco alle dilatazioni in direzione y perpendicolare a questa. Perciò esso andrà evidentemente montato in modo che la direzione privilegiata di sensibilità coincida con quella della dilatazione da misurare. Inoltre, poiché il fatto che l'estensimetro sia sensibile anche alla dilatazione in direzione y a causa delle anse presenti nella serpentina é evidentemente di disturbo nella misura (perché diminuisce in definitiva la sensibilità nella direzione x), si preferisce in genere costruire l'estensimetro secondo lo schema di figura 5.29c e d: nel caso d , la resistenza non é piú costituita da un filo continuo, ma da piú fili paralleli collegati in serie con altri piccoli tratti di filo di sezione maggiore e di materiale di elevata conduttività elettrica (cioé di resistenza molto bassa) in modo che le variazioni di resistenza (anche percentuali) di questi tratti risultino trascurabili. La lunghezza l (figura 5.29) é la base dell'estensimetro: essa non va confusa con l'ingombro longitudinale dell'estensimetro, che é sempre maggiore della base a causa delle maggiori dimensioni del supporto e dell'esistenza dei terminali della resistenza. Le lunghezze piú comuni della base sono 5 mm, 10 mm, 20 mm: esistono però estensimetri con base anche maggiore o minore.

I valori piú comuni della resistenza vanno da 120Ω a 1000Ω : essi sono forniti dal costruttore con una certa tolleranza (ad es. resistenza $350 \pm 3 \Omega$). Il valore della resistenza é riportato sulle bustine che contengono ognuna un certo numero di estensimetri (5 o 10): la tolleranza sul valore della resistenza significa che tutti gli estensimetri contenuti nella busta hanno un valore della resistenza contenuto entro i limiti da essa stabiliti.

Variazioni di resistenza indotte da deformazione.

Esponiamo alcuni richiami di teoria dell'elasticità :

Nel regime elastico l'allungamento é proporzionale alla forza per unità di superficie ed alla lunghezza.

$$\Delta l = \frac{1}{E} \left(\frac{F}{S} \right) l$$

$\frac{1}{E}$ =coefficiente di allungamento, E=modulo di Young (di allungamento).

$$[E] = \frac{\text{Forza}}{\text{Superficie}} = \frac{N}{m^2}$$

(per $\frac{F}{S} = E$, in regime elastico, $\Delta l = l \implies$ raddoppio l)

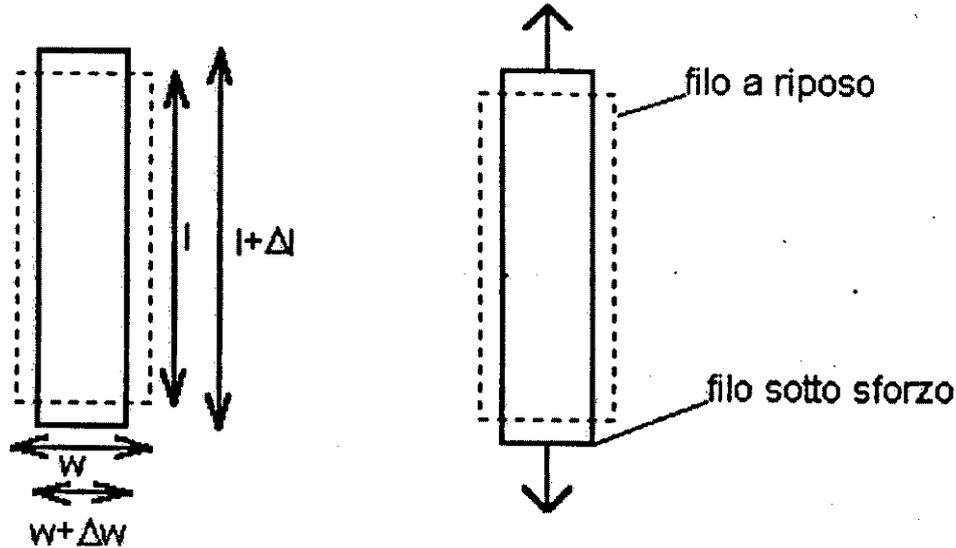


Figura 5.31: Il filo cambia dimensione longitudinale e trasversale in seguito all'applicazione di forze.

Per ogni dimensione lineare trasversale vale :

$$\Delta w = -\frac{1}{B} \left(\frac{F}{S} \right) w$$

$\frac{1}{B}$ =coefficiente di contrazione, B=modulo di contrazione trasversale.

Si definisce un rapporto tra la variazione trasversale e longitudinale :

$$v = \frac{\left(-\frac{\Delta w}{w} \right)}{\frac{\Delta l}{l}} = \frac{\frac{1}{B}}{\frac{1}{E}} = \frac{E}{B} = \text{fattore - modulo di Poisson}$$

Nota

Consideriamo il volume del filo (ad esempio a sezione circolare - w=diametro). Il volume è uguale a $l\pi\left(\frac{w}{2}\right)^2$. Consideriamo le variazioni di volume conseguenti alla deformazione:

$$\begin{aligned} \Delta V &= \Delta l \pi \left(\frac{w}{2} \right)^2 + l \pi \frac{w}{2} \Delta w \\ \frac{\Delta V}{V} &= \frac{\Delta l}{l} + 2 \frac{\Delta w}{w} = (1 - 2v) \frac{\Delta l}{l} \end{aligned}$$

Se v è pari ad $\frac{1}{2}$ allora $\Delta V = 0$. E', questa, un'indicazione sul significato del fattore di Poisson. Se $v < 0.5$ il volume del filo teso è aumentato rispetto a quello iniziale.

- Acciaio : $v=0.3$
- Gomma : $v = 0.48-0.50$

Costante dell'estensimetro.

Si definisce *costante* dell'estensimetro a resistenza elettrica il rapporto

$$K = \frac{\Delta R/R}{\Delta l/l} = \frac{\Delta R/R}{e_L}$$

dove e_L deformazione longitudinale; fornisce il rapporto tra la variazione relativa di resistenza e la deformazione longitudinale (variazione relativa di lunghezza). La resistenza elettrica dell'estensimetro vale

$$R_{filo} = \rho \frac{l}{A}$$

dove l é la lunghezza attiva del filo, A la sezione, ρ la resistività elettrica. Differenziando si ha

$$\begin{aligned} \Delta R &= \left(\frac{\partial R}{\partial l}\right) \Delta l + \left(\frac{\partial R}{\partial A}\right) \Delta A + \left(\frac{\partial R}{\partial \rho}\right) \Delta \rho = \frac{\rho}{A} \Delta l - \frac{\rho l}{A^2} \Delta A + \frac{l}{A} \Delta \rho \\ \frac{\Delta R}{R} &= \frac{\Delta l}{l} - \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta \rho}{\rho} \end{aligned}$$

Ponendo $A = wt = \text{larghezza} \cdot \text{spessore}$, si ha

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{\Delta w}{w} - \frac{\Delta t}{t} = -2v \frac{\Delta l}{l}$$

ovvero

$$\frac{\Delta R}{R} = (1 + 2v) \frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta \rho}{\rho}$$

osservando che

$$\frac{\Delta R}{R} = \left[\underbrace{(1 + 2v) + \frac{\Delta \rho/\rho}{e_L}}_K \right] e_L$$

Si potrà quindi scrivere

$$K = \left[\left(1 + 2 \underbrace{v}_{\simeq 0.3} \right) + \underbrace{\frac{\Delta \rho/\rho}{e_L}}_{\simeq 0.4} \right] \simeq 2$$

Il termine $\frac{\Delta \rho/\rho}{e_L}$, che é la variazione di resistività in funzione della deformazione, quantifica la **piezoresistività** del materiale: piccola nei metalli ($\simeq 0$) e prevalente nei semiconduttori (± 100 , vedi pagine seguenti). Come si vede, se fosse presente solo il fenomeno di variazione di resistenza a causa della variazione di forma, la costante dell'estensimetro si aggirerebbe attorno a $1.50 \div 1.70$. Invece la costante K é diversa da tale valore: in genere é superiore, se vi é un effetto, che può essere anche notevole, di variazione di resistività in funzione della sollecitazione. *La costante K viene determinata mediante taratura ed il suo valore é fornito dal costruttore con una tolleranza che normalmente é del $\pm 1\%$.*

Influenza della temperatura.

La temperatura influenza il funzionamento dell'estensimetro sotto piú aspetti, e principalmente:

- Vi é un limite di temperatura che non puó essere sorpassato, pena il danneggiamento dell'estensimetro.
- La resistenza del filo varia al variare della temperatura.
- L'estensimetro, sottoposto ad una variazione di temperatura, si dilata: se queste dilatazioni sono impedito, del tutto o in parte, nasce nell'estensimetro uno stato di sollecitazione che si aggiunge a quello dovuto ai carichi.
- La costante dell'estensimetro varia con la temperatura: ciò é spiegabile con il fatto che il modo di variare della resistivitá, al variare della deformazione, dipende dal valore della temperatura.

Per quanto riguarda la temperatura limite, é da osservare che essa dipende non solo dalla lega con la quale é costituito il filo, ma anche dalla natura del supporto e dall'adesivo impiegato. Si é visto che il supporto puó essere in carta, e in tal caso la temperatura limite non puó essere molto elevata ($50\div 60^{\circ}\text{C}$), o in bachelite o altre resine, e in tal caso, con collanti appropriati, ad esempio a base di resine polimerizzanti con additivi o a caldo (resine termoindurenti), si raggiungono temperature limiti piú elevate (150°C e anche piú). Inoltre il limite di temperatura puó essere piú elevato nel caso di misure dinamiche che nel caso di misure statiche, poiché sotto sollecitazioni costanti sono piú facilmente presenti fenomeni di scorrimento fra filo, supporto e adesivo, e, se la temperatura é abbastanza elevata, anche fenomeni di rilassamento delle sollecitazioni nel filo: vi é quindi da temere una riduzione della sollecitazione del filo stesso, con conseguenti errori nella misura. Si noti infine che il riscaldamento puó essere prodotto sia dalla temperatura elevata del pezzo, sia dalla corrente che passa nell'estensimetro. Per quanto riguarda il variare della resistenza al variare della temperatura, si definisce *COEFFICIENTE DI TEMPERATURA* dell'estensimetro il rapporto fra la variazione di resistenza, riferita alla unitá di resistenza, e la variazione di temperatura di 1°C . Se si hanno a temere variazioni di temperatura, occorre quindi che tale coefficiente risulti il piú possibile basso. Per quanto riguarda le eventuali dilatazioni impedito, vi é da tener presente che tali impedimenti possono sorgere sia perché solo l'estensimetro subisce la differenza di temperatura (perché in esso vengono fatte passare correnti elettriche eccessive), sia perché il pezzo in esame non puó dilatarsi, sia infine perché tanto il pezzo quanto l'estensimetro sono sottoposti alla variazione di temperatura, ma i loro coefficienti di dilatazione sono diversi. In tal caso l'estensimetro sará sottoposto ad una sollecitazione di compressione o di trazione a seconda che il suo coefficiente di dilatazione sia rispettivamente maggiore o minore di quello del pezzo. Infine per quanto riguarda la variazione della costante dell'estensimetro con la temperatura, essa in genere si mantiene praticamente costante fino a $60\div 70^{\circ}\text{C}$ per poi calare bruscamente per valori superiori della temperatura. I mezzi per ovviare a questi inconvenienti prodotti dalla temperatura sono sostanzialmente i seguenti:

1. Impiegare nel circuito a ponte di misura un secondo estensimetro (*estensimetro compensatore*) montato su un pezzo non sollecitato, dello stesso materiale del pezzo in esame, e inserito nel ponte in modo che un vertice del ponte stesso sia comune ai due estensimetri: in tal caso se l'estensimetro ha lo stesso coefficiente di temperatura, ed é portato alla stessa temperatura di quello di misura, il ponte non risente delle variazioni di resistenza dovuta alla variazione di temperatura, come pure delle dilatazioni impedito.

2. Impiegare estensimetri autocompensati. Essi possono essere costituiti con materiale che presenta un coefficiente di temperatura e un coefficiente di dilatazione (in rapporto con quello del pezzo in esame) tali che non si risenta praticamente delle variazioni di temperatura, almeno nel campo di temperatura di utilizzo. Altri tipi di estensimetri autocompensati hanno invece un tratto di filo di materiale apposto in serie col filo principale (figura 5.32a), avente un coefficiente di temperatura diverso da quello del filo principale.

3. Impiegare estensimetri autocompensati universali, corrispondenti allo schema di figura 5.32b. Il filo posto in serie a quello dell'estensimetro vero e proprio ha, anche in questo caso, un andamento del coefficiente di dilatazione in funzione della temperatura diverso da quello dell'estensimetro. Tale filo viene messo in parallelo ad una resistenza, eventualmente regolabile, in modo che il comportamento globale dell'estensimetro al variare della temperatura possa adattarsi a quello del materiale sul quale é destinato a lavorare. Poiché tale regolazione é fatta in funzione della temperatura, in alcuni casi é incorporata nell'estensimetro una coppia termoelettrica che permette appunto il rilievo diretto della temperatura alla quale si trova l'estensimetro.

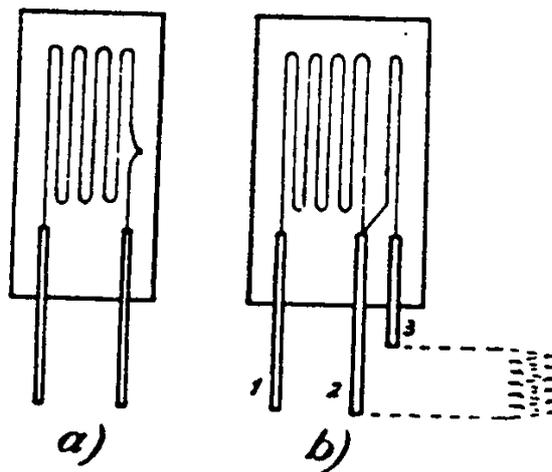


Figura 5.32:

Nella tabella I sono riportate le caratteristiche di alcuni materiali impiegati nella costruzione degli estensimetri a resistenza elettrica. I dati riportati in tabella sono solo indicativi in quanto influenzati da vari fattori (ad esempio il procedimento di fabbricazione).

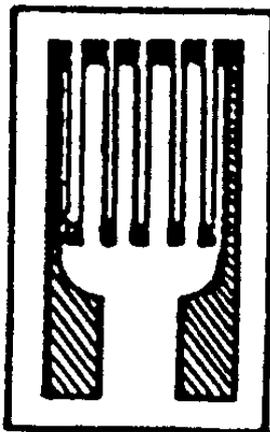


Figura 5.33:

Tabella I.- *Caratteristiche di alcuni materiali per estensimetri*

Lega o metallo	Composizione in %	Costante	Coeff. di temperatura $\frac{m\Omega}{\Omega}$	Resistività $\frac{\Omega}{mm^2}$
Nicromo	Ni 80,Cr 20	+2	+0,3	390
Manganina	Ni 4,Mn 12,Cu 84	+0,5	+0,01	160
Advance	Ni 45,Cu 55	+2,1	$\pm 0,002$	195
Copel	Ni 45,Cu 55	+2,4	$\pm 0,002$	195
Costantana	Ni 60,Cu 40	+2,1	$\pm 0,02$	195
Isoelastic	Ni 36,Cr 8,Fe 52,Mo 0,5	+3,5	$\pm 0,470$	415
Karma	Ni 73,Cr 20,Al,Fe,ed altri	+2,4	+0,020	6200
Nichel		-12	+6,000	44

Nella tabella II sono riportati alcuni esempi di estensimetri e loro caratteristiche principali. Infine da notare che, per quanto detto nei paragrafi precedenti, é opportuno conoscere il valore della corrente massima sopportabile dall'estensimetro, normalmente di qualche decina di mA: tale dato é fornito dal costruttore e dipende evidentemente dalla temperatura d'impiego.

Estensimetri stampati.

Una particolare tecnica di realizzazione di estensimetri a resistenza elettrica consiste nello stampare, con procedimento di fotoincisione, un foglio sottile di metallo su un supporto di carta o di bachelite, dandogli la forma desiderata (figura 5.33). In alcuni casi il supporto é solo provvisorio e viene tolto al momento dell'applicazione dell'estensimetro: si ottiene con ciò fra l'altro la possibilità di impiego dell'estensimetro a temperatura molto elevata (anche fino a 1100° C). Gli estensimetri stampati presentano i seguenti vantaggi, in confronto a quelli a filo:

1. A causa della superficie maggiore, a parità di sezione, dissipano meglio il calore e sopportano perciò correnti più elevate.
2. Il supporto può essere molto più sottile e quindi l'estensimetro risulta più flessibile in modo che la sua applicazione su superfici curve viene facilitata.

3. I raccordi trasversali possono essere fatti senza difficoltà a sezione elevata.
4. I terminali sono costituiti da una espansione della parte sensibile e presentano perciò una maggiore resistenza meccanica.
5. È facile ottenere estensimetri di forma qualsiasi e dimensioni anche molto piccole (lunghezza della base $\simeq 1\text{mm}$).
6. Per la possibilità di essere incollati al pezzo senza supporto, si possono raggiungere temperature molto elevate.

Ditta costruttrice	Tipo	Supporto	Base mm	Resistenza Ω	Costante K
Baldwin (U.S.A.)	A-1	carta	20.638	120±0.2	2
	A-5	carta	12.700	120±0.2	2
	A-7	carta	6.350	120±0.3	2
	A-19	carta	1.588	60±0.5	1.7
	C-10	carta	7.938	1000±5	3.2
	C-14	carta	1.588	2000±0.5	2.7
	AB-1	bachelite	22.225	350±3	2
	AB-5	bachelite	12.700	75±0.3	-
	AB-11	bachelite	3.175	120±0.5	1.9
Philips (Olanda)	PR-9210	carta	25	600±0.5%	2÷2.11
	PR-9211	carta	12	120±0.5%	2÷2.11
	PR-9212B	bachelite	8	600±0.5%	2÷2.11
	PR-9214B	bachelite	4	120±0.5%	2÷2.11
Tepic, Huggenbergen (Svizzera)	PB1-120	carta	10	120	2.35÷2.55
	PB2-120	carta	20	120	2.35÷2.55
	BL1-120	resina trasp.	10	120	2.35÷2.55
	BL2-500	resina trasp.	20	500	2.35÷2.55
	BL6-350	resina trasp.	60	350	2.35÷2.55
Tinsley (Gran Bretagna)	6 C	carta	17	200	2.25
	6 H	carta	8	50	2
	8 A	carta	46	2000	2.35
	16 C	carta	24	1500	2.10
	2 C	bachelite	17	250	1.95÷2.1
	1 A	araldite	6.35	110	2.2÷2.3
A.O.I.P. (Francia)	12 B 5	carta	5	120	2
	8 B 11	carta	11	120	2.05
	18 B 25	carta	25	600	2.1
	12 B 5P	resina	5	120	2
Boano (Italia)	Z F 1	carta	21	120±0.2	2
	S F 1	bachelite	8	120±0.2	1.9
	S C 6	bachelite	20	600±0.1	2

Alcune considerazioni nell'impiego degli estensimetri.

L'estensimetro a resistenza elettrica, al momento della misura, fa parte di un circuito elettrico alimentato con corrente continua o oscillante (1000÷10000 Hz). Ciò premesso, e tenuto presente quanto già detto nei paragrafi precedenti, riportiamo qui le principali precauzioni che vanno prese nell'uso di questi estensimetri.

1. L'incollaggio dell'estensimetro sulla superficie del pezzo deve essere perfetto e non lasciare possibilità di scorrimenti relativi.
2. Le saldature dei terminali dell'estensimetro devono essere condotte con somma cura, in modo da ridurre al minimo la resistenza parassita.

3. L'estensimetro incollato deve presentare verso il pezzo (in genere a massa) una resistenza elevata (di qualche decina di $M\Omega$) per assicurare l'isolamento elettrico ed evitare dispersioni di corrente che altererebbero la misura.
4. Grande cura deve essere posta nel riparo l'estensimetro, specie quelli con supporto di carta, dall'umidità, che lo danneggerebbe e ne diminuirebbe l'isolamento.
5. I cavi di collegamento devono essere di sezione non troppo piccola e di lunghezza la minima possibile, per ridurre le resistenze e le capacità parassite.

Le rosette di estensimetri. *

Le *rosette* sono insiemi di piú estensimetri a resistenza elettrica montati sul medesimo supporto, e servono alla determinazione dello stato di deformazione e di sollecitazione in un punto della superficie di un elemento costruttivo. Esse possono essere di vario tipo; con riferimento alla figura 5.34, si hanno in *a*) e *b*) rosette composte di tre estensimetri a 45° fra di loro (*rosette rettangolari*); in *c*) una rosetta composta di tre estensimetri a 120° (*rosetta a delta*); in *d*) tre estensimetri a 120° piú uno a 90° rispetto a uno dei precedenti (*rosetta a delta T*); in *e*) e *f*) rosette composte da due estensimetri a 90° fra loro (*rosette rettangolari a due estensimetri*).

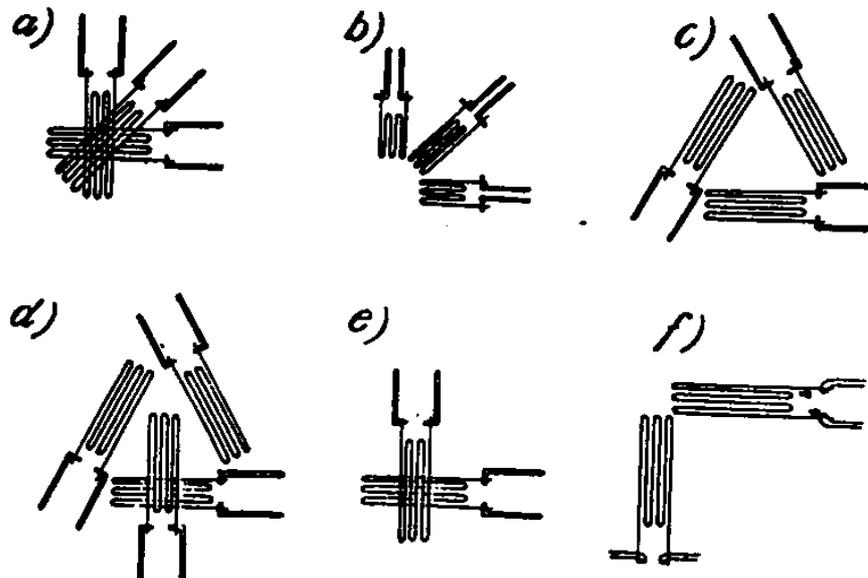


Figura 5.34:

Estensimetri a resistenza di semiconduttori.

Gli estensimetri a resistenza elettrica vengono realizzati anche con materiali semiconduttori (silicio, germanio, ecc.). Essi presentano il vantaggio di avere delle costanti K di valore molto elevato.

Tabella III.-Esempi di estensimetri in materiale semiconduttore.

Ditta costruttrice	Tipo	Base mm	Resistenza Ω	Costante K	Coeff. di temper. $\Omega/\Omega^{\circ}C$	Variazione di K con temp. $\%/100^{\circ}C$
Budd(U.S.A.)	DB-102	6.4	120	+105	-	-21
	DB-106	6.4	5000	+115	-	-55
	DB-107	2.5	250	+140	-	-34
	DB-108	6.4	10000	+195	-	-41
	DB-111	6.4	60	+ 45	-	0
	DBN-102	6.4	120	-100	-	-60
	DBN-104	6.4	500	-130	-	-50
	DBN-105	6.4	1000	-140	-	-65
	MP-103-4	6.4	350	+230	-	-39
	MP-102-6	6.4	120	+220	-	-41
Kyowa (Giappone)	KS-1	7	120	-110	3.5	48
	KS-2	7	120	- 80	3.5	45
	KS-3	7	120	+130	2.0	33
	KS-6	3.5	120	-120	3.5	48
	KS-9	7	120	+200	0.2	40

Tali estensimetri sono costituiti da un filamento molto sottile, ottenuto tagliando un monocristallo di materiale semiconduttore: il diametro del filamento é dell'ordine di 0,02-0,1mm. Alle due estremitá sono saldati due fili di nichel che servono da terminali. L'insieme é incorporato in un sottile foglio di plastica che serve da supporto: l'incollaggio e i collegamenti elettrici sono effettuati come nel caso degli estensimetri a resistenza di conduttori metallici. Il maggiore valore del diametro e la maggiore rigidezza del materiale rendono tali estensimetri meno adatti al loro impiego su superfici a forte curvatura. La temperatura massima raggiungibile é dell'ordine di 100-170°C a seconda dei tipi. Nella Tabella III sono riportati alcuni esempi di tali estensimetri.

La costante dell'estensimetro é:

$$K_{semiconduttori} = \left[\left(1 + 2 \underbrace{\quad}_{\simeq \text{come nei metalli}} \right) + \frac{\Delta\rho/\rho}{\underbrace{e_L}_{\pm 100-200, +tipop, -tipon}} \right]$$

La $\frac{\Delta\rho}{\rho}$ nei semiconduttori dipende dalla struttura a bande, legata a sua volta alle dimensioni del reticolo cristallino. Si modifica la mobilitá ed il numero di portatori, deformando il cristallo. Questi effetti vengono utilizzati su fili sottili lunghi, disposti a serpentina su un supporto legato ad un materiale campione sotto sforzo.

5.8.3 Altri tipi di estensimetri. *

Estensimetri ottici.

Gli estensimetri di questa categoria possono suddividersi in estensimetri basati sul principio della leva ottica, ed estensimetri a confronto indiretto per via ottica.

Estensimetri a leva ottica. In figura 5.35 è riportato lo schema dell'estensimetro tipo Martens; esso è costituito da uno specchietto A solidale col coltello mobile B, in modo che, ruotando quest'ultimo, ruota anche lo specchietto. Mediante il cannocchiale C si legge, con l'aiuto di un vetrino a reticolo, la scala D riflessa dallo specchietto. Il rapporto di amplificazione risulta eguale a $2\frac{b}{a}$: si hanno normalmente amplificazioni dell'ordine di 500. La lunghezza della base è variabile da pochi centimetri a qualche decina di cm. L'impiego di tale strumento risulta piuttosto delicato in quanto sono presenti varie cause possibili di errore.

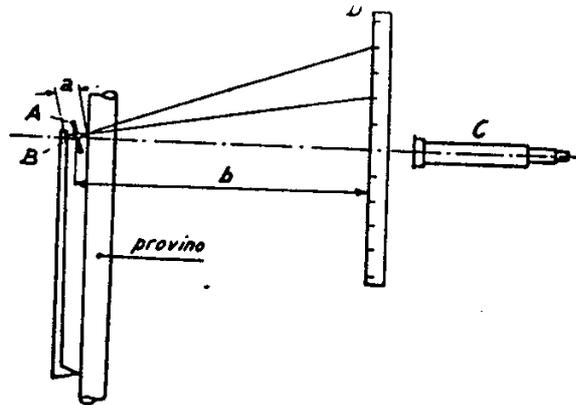


Figura 5.35:

Poiché l'estensimetro è fissato sul pezzo (ad esempio un provino posto sulla macchina a trazione) mentre la scala e il cannocchiale sono montati su un supporto separato, occorre che non si verifichino spostamenti relativi fra provino e gruppo scala-cannocchiale. Inoltre la scala deve essere messa in un piano parallelo a quello dello specchio, a provino scarico.

Estensimetri ottici a confronto diretto. Sono strumenti meccanici, in genere basati sul principio dell'amplificazione a leva, nei quali lo spostamento dell'estremo della leva viene letto per via ottica (ottenendo così un'ulteriore amplificazione). Altri sistemi misurano, con una cellula fotoelettrica, l'energia luminosa che passa in una fessura che si allarga all'aumentare dello spostamento del coltello mobile. Da ultimo ricordiamo anche gli estensimetri nei quali si misura l'inclinazione della leva con metodo interferometrico utilizzando un vetro ottico a facce piane posto sopra l'estremo della leva stessa e rilevando la distanza fra le frange di interferenza: l'inclinazione della leva vale, detta λ la lunghezza d'onda scelta e d la distanza misurata

$$i = tg\alpha = \frac{\lambda}{4d}$$

Estensimetri a variazione di induttanza.

Il piú semplice estensimetro di questo tipo é costituito da una bobina il cui nucleo magnetico (cilindrico o conico) puó muoversi lungo l'asse della bobina stessa: l'avvolgimento é solidale con un coltello, mentre il nucleo é solidale con l'altro (figura 5.36a). La presenza di una dilatazione provoca un moto relativo fra avvolgimento e nucleo, e conseguentemente quest'ultimo penetrerá piú o meno nella bobina, in modo da variarne l'induttanza. L'avvolgimento della bobina costituisce un lato di un circuito a ponte alimentato in corrente oscillante.

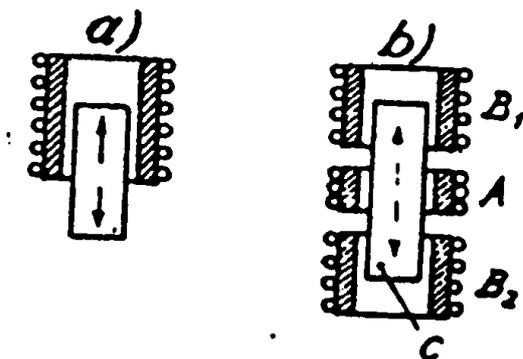


Figura 5.36:

Dispositivi piú complessi sono costituiti da avvolgimenti posti sullo stesso asse in modo che l'unico nucleo magnetico, uscendo da uno di essi ed entrando nell'altro, provochi una variazione eguale e di segno opposto nell'induttanza dei due avvolgimenti che costituiscono in tal caso due lati contigui del ponte. Infine da ricordare l'estensimetro di figura 5.36b.

Esso é costituito da un avvolgimento primario A alimentato a corrente oscillante ($4000 \div 10000 \text{ Hz}$), e da due avvolgimenti secondari B_1 , B_2 coassiali col primario, e ad esso accoppiati con un nucleo magnetico C costituito da un cilindretto di lunghezza opportuna e mobile lungo il proprio asse. Spostando il cilindretto variano le mutue induttanze fra il primario e i due secondari, nel senso che una aumenta mentre l'altra diminuisce. I due avvolgimenti secondari costituiscono i due lati contigui di un circuito a ponte, e sono collegati in modo che le f.e.m. in essi generate abbiano segno opposto; queste f.e.m., e quindi la tensione ai capi delle diagonali di misura, dipendono perció dalla posizione del nucleo magnetico. Il cilindretto che costituisce tale nucleo, é reso solidale con uno dei coltelli, mentre gli avvolgimenti sono solidali con l'altro coltello; in tal modo, una volta montato l'estensimetro sul pezzo, la posizione del nucleo dipenderá dall'allungamento del pezzo, e ai vertici di misura comparirá un segnale proporzionale alla dilatazione del pezzo stesso.

5.8.4 Taratura degli estensimetri.

Gli estensimetri meccanici, ottici, acustici, e a variazione di induttanza, vengono tarati misurando la lunghezza della base con uno strumento di misura di sensibilità appropriata a tale lunghezza (cioé tanto maggiore quanto minore é la base), e provocando una variazione nota di tale lunghezza, misurata con apparecchi micrometrici o a controllo ottico, che possono assicurare una precisione di misura di

$\pm 0.2\mu m$. Per gli estensimetri a variazione di resistenza elettrica la taratura consiste nel ricavare statisticamente la costante di una data serie o partita di estensimetri di resistenza nota: ciò avviene incollando uno o più estensimetri della serie su un provino e provocando su questo una dilatazione e_L nota. La dilatazione può essere data ad esempio mediante un dispositivo nel quale il provino è una barra a sezione rettangolare di acciaio appoggiata su due coltelli: alle estremità della barra, poste ad eguale distanza dai coltelli, vengono applicati due pesi eguali, in modo che nel campo fra i coltelli il momento flettente della barra sia costante. Uno dei coltelli è montato su un supporto incernierato per rendere isostatica la trave. Gli estensimetri vengono applicati dal lato teso della barra, in corrispondenza del quale può facilmente calcolarsi per via indiretta la dilatazione e_L .

5.8.5 Osservazioni.

Nei paragrafi precedenti sono stati descritti i principali tipi di estensimetri. È utile ricordare che esistono altri metodi per valutare le deformazioni e le sollecitazioni. Ad esempio può essere il metodo della *fotoelasticità*, mediante prove effettuate su modelli in resine sintetiche o mediante uno strato di resine di tale tipo che diventano birfrangenti quando vengono sollecitate, applicato direttamente alla superficie del pezzo: come pure osservazioni estensimetriche possono essere condotte anche mediante *reticoli* riportati sulla superficie del pezzo, osservandone la deformazione una volta applicato il carico, o mediante l'impiego di *vernici criccanti*. Per tutti questi metodi rimandiamo a testi specializzati.

5.9 Piezoelettricità

$e_L = (\text{coefficiente di allungamento}) \cdot (\text{sforzo}) = s \cdot z$. Polarizzazione elettrica :

$$P = \chi \varepsilon_0 E \quad (\chi \text{ suscettività dielettrica, } E \text{ campo elettrico})$$

Induzione elettrica :

$$D = \varepsilon_r \varepsilon_0 E \quad (\varepsilon_r \text{ costante dielettrica relativa})$$

$$D = P + \varepsilon_0 E$$

e_L = deformazione del reticolo cristallino.

P = polarizzazione delle cariche positive-negative nel reticolo cristallino.

Quando un corpo viene deformato si spostano gli atomi, quando viene polarizzato, le cariche. Sono vere le seguenti relazioni :

$$P = \chi \varepsilon_0 E + dz \quad \text{effetto piezoelettrico DIRETTO}$$

dz = eventuale contributo a P per deformazione del reticolo cristallino sotto l'azione dello sforzo z .

Se questo contributo è presente, il campo elettrico che sposta le cariche può corrispondentemente indurre uno spostamento.

$$e = sz + dE \quad \text{effetto piezoelettrico INVERSO}$$

d = eventuale contributo alla deformazione del reticolo cristallino per l'azione del campo E ; d è lo stesso di prima : se c'è il contributo prima menzionato allora c'è anche questo e viceversa.

L'effetto piezoelettrico è presente soltanto nei materiali cristallini con basso grado di simmetria ; ovvero se il reticolo presenta una disposizione simmetrica delle cariche , la deformazione non induce alcun effetto :

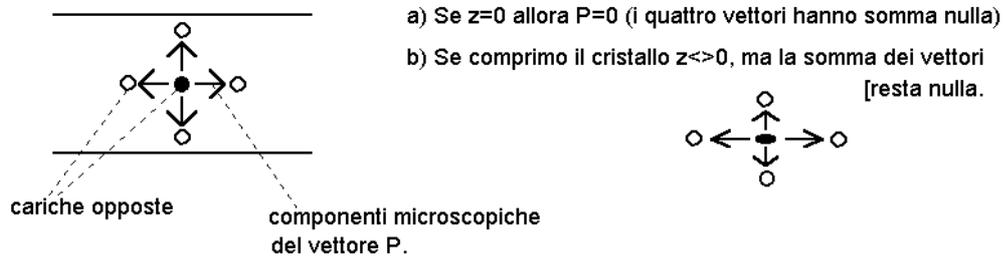


Figura 5.37:

Qualora la situazione non sia simmetrica (o sia a basso grado di simmetria), con caratteristiche di tipo ionico, la struttura deformata non è più bilanciata elettricamente.

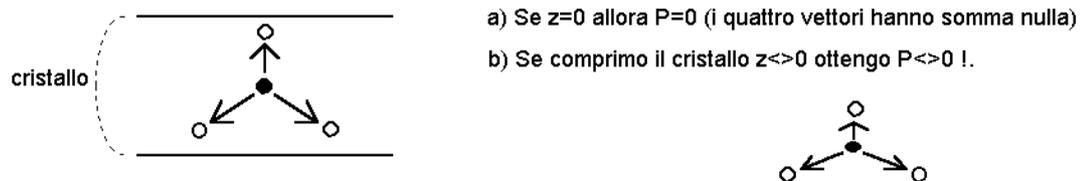


Figura 5.38:

Il silicio non è piezoelettrico, lo sono il quarzo, la tormalina, il sale di Rochelle,...

$$\begin{aligned}
 [Z] &= \frac{N}{m^2} \\
 [P] &= \frac{\text{Coulomb}}{m^2} \\
 [d] &= \frac{\text{Coulomb}}{\text{Newton}} = \frac{\text{Coulomb Volt}}{\text{Newton Volt}} = \frac{J}{N \cdot V} = \frac{m}{V} \\
 [e] &= \text{adimensionale} \\
 [E] &= \frac{V}{m} \\
 [d] &= \frac{m}{V}
 \end{aligned}$$

5.10 Dispositivi piezoelettrici

Ricaviamo il circuito equivalente di un dispositivo piezoelettrico.

La carica superficiale che si localizza sulla superficie del cristallo è di valore uguale alla componente

		d	ϵ_r	Modulo di Young
(naturali)	Quarzo	$2.3 \cdot 10^{-12}$	4.5	$80 \cdot 10^9$
	Tormalina	$1.9 \div 2.4^{(*)} \cdot 10^{-12}$	6.6	$160 \cdot 10^9$
(artificiali - ceramiche piezoelettriche)	Titanato di Pb	$265 \cdot 10^{-12}$	2500	$79 \cdot 10^9$
	Niobato di Pb	$80 \cdot 10^{-12}$	250	$47 \cdot 10^9$

(*) a seconda degli orientamenti del cristallo

Figura 5.39: Materiali piezoelettrici

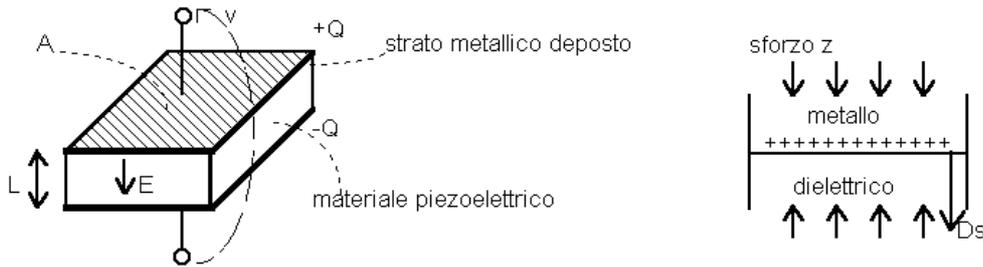


Figura 5.40: Dispositivo piezoelettrico

normale del vettore D . $D_s =$ densità di carica superficiale. Nel nostro caso $D_s = D$.

$$Q = (\text{densità di carica})(\text{area}) = D_s A = A(\epsilon_r \epsilon_0 R + dz) = \epsilon EA + dzA$$

Assumo che il campo elettrico sia uniforme :

$$Q = \epsilon El \frac{A}{l} + dzA = \epsilon \frac{A}{l} v + dzA$$

$\epsilon \frac{A}{l}$ è una capacità $\implies Q = CV + dzA$.

$zA =$ forza totale applicata al dispositivo = F .

$$Q = CV + dF$$

Questa relazione vale ancora se le grandezze sono variabili nel tempo.

$$Q(t) = Cv(t) + df(t)$$

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} + d \frac{df(t)}{dt}$$

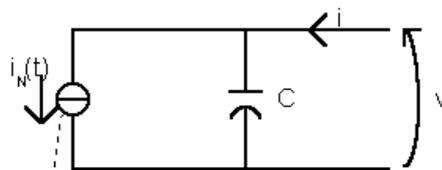
Interpretiamo circuitalmente questa relazione :

Se non è applicata forza $i_N(t) = 0$.

$$i_N(t) = d \frac{df(t)}{dt}$$

Aspetti dinamici dell'effetto piezoelettrico : l'effetto piezoelettrico è associato a moti del cristallo , a vibrazioni del reticolo cristallino , quindi abbiamo fenomeni di inerzia e di attrito viscoso.

$$F(\text{esterne, elastiche, attrito}) = ma$$



generatore indipendente di corrente, funzione delle variazioni temporali della forza applicata $f(t)$.

Figura 5.41: Schema elettrico

$$\underbrace{m \frac{d^2 x}{dt^2}}_{\text{inerzia}} + \underbrace{\lambda \frac{dx}{dt}}_{\text{attrito viscoso}} + \underbrace{kx}_{\text{elastica}} = F_{\text{esterna}}$$

(z è lo scostamento dalla posizione di equilibrio)

$$\underbrace{\frac{m}{k}}_{\frac{1}{\omega_n^2}} \frac{d^2 x}{dt^2} + \underbrace{\frac{\lambda}{k}}_{\frac{2\xi}{\omega_n}} \frac{dx}{dt} + x = \frac{F_{\text{est}}}{k}$$

ω_n = pulsazione caratteristica, ξ = coefficiente di smorzamento. Applicando la trasformata di Laplace :

$$x(s) = \frac{\frac{1}{k}}{1 + s \frac{2\xi}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}} F_{\text{est}}(s) = G(s) \frac{1}{k} F_{\text{est}}(s)$$

La deformazione del cristallo segue dunque le leggi di oscillazione meccanica con smorzamento. Valori tipici del materiale piezoelettrico sono : $\omega_n = 2\pi f_n$, $f_n = 27\text{kHz}$, $\xi = 0.01$.

Questo porta ad avere una risposta oscillatoria stabilizzata :

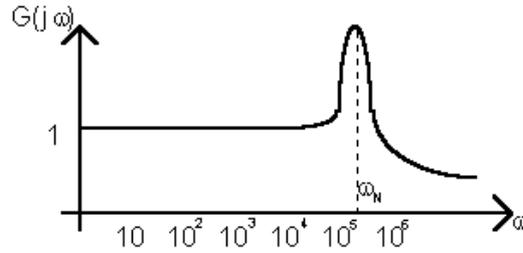


Figura 5.42: Risposta oscillatoria stabilizzata

Tenendo conto della presenza della capacità nel nostro circuito, determiniamo il valore di i e Q .

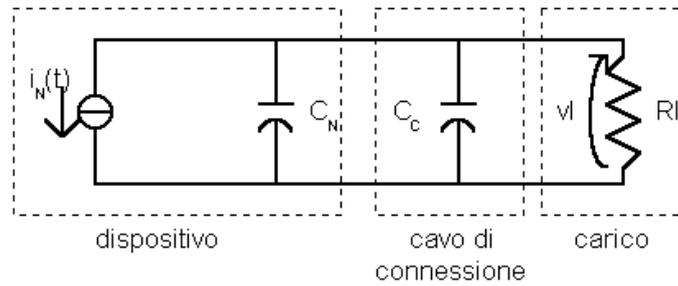


Figura 5.43:

Valori tipici : $C_N = 1600pF$, $C_c = 600pF$, $R_L = 1M\Omega$.

$$V_L(s) = -I_N(s) \frac{1}{\left[\frac{1}{R_L} + s(C_N + C_c)\right]} = -\frac{R_L}{1 + sR_L(C_N + C_c)} I_N(s)$$

Con i valori dati : $2\pi R_L(C_N + C_c) = (72Hz)^{-1} \implies$ abbiamo un limite in frequenza.

Relazione corrente-forza :

$$I_N(s) = \underbrace{K \left(-\frac{1}{k}\right)}_d sG(s)F(s) = dsG(s)F(s) \quad (I_N = K \frac{dx}{dt})$$

$$V_L(s) = d \frac{sR_L}{1 + sR_L(C_N + C_c)} G(s)F(s) \implies V_L(s) = \frac{d}{(C_N + C_c)} \frac{s\tau}{1 + s\tau} G(s)F(s)$$

Possiamo estendere il funzionamento alle basse frequenze con il seguente schema:

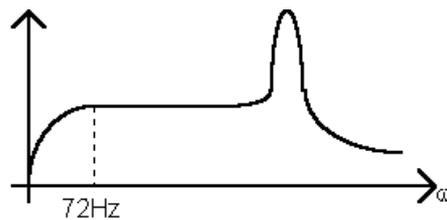


Figura 5.44:

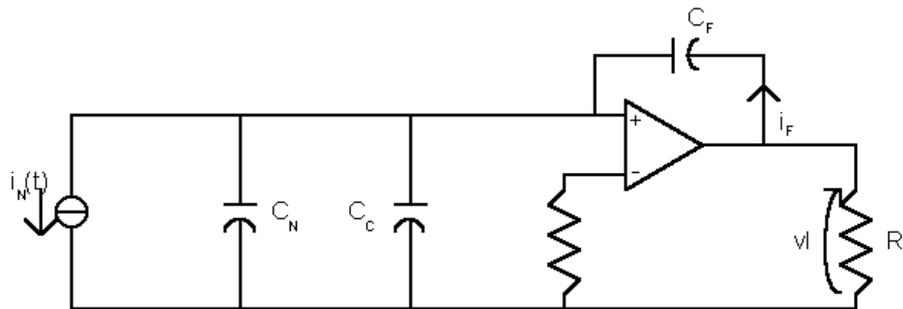


Figura 5.45:

$$V_L s C_F = i_F = i_N = dsF(s)$$

$$\Rightarrow V_L = \frac{d}{C_F} F(s) = sQ \text{ proporzionale alla forza, ovvero alla carica localizzata}$$

Se poniamo una resistenza in parallelo a C_f (es 100M) per avere un percorso verso massa, introduciamo una costante di tempo di qualche secondo estendiamo alle basse frequenze l'impiego del trasduttore. Complessivamente il trasduttore piezoelettrico correla la forza applicata F alla tensione V_L . Il campo di frequenze si estende da alcuni Hz ($\frac{1}{\tau f}, \tau f = R_f C_f$) ad alcuni kHz (ωn).

Fotocopia 13 : fig.8.12 a)..d) sistemi di misura di accelerazione lineare , pressione, accelerazione angolare, torsione, con le relative funzioni di trasferimento nel dominio di Laplace. fig.8.13 a)...d) Esempi di applicazione degli strain gauges per la misura di deformazione di una mensola (cantilever), la deformazione longitudinale e trasversale di un pilastro, per la misura di coppia e di accelerazione.

5.11 Accelerometri

Facciamo riferimento alla *fig.8.12 a)* ; osserviamo il moto relativo di una massa connessa elasticamente ad un contenitore: sono rappresentate simbolicamente le forze che si scambiano tra la massa m ed il contenitore stesso. Consideriamo il moto rispetto ad un osservatore inerziale esterno :

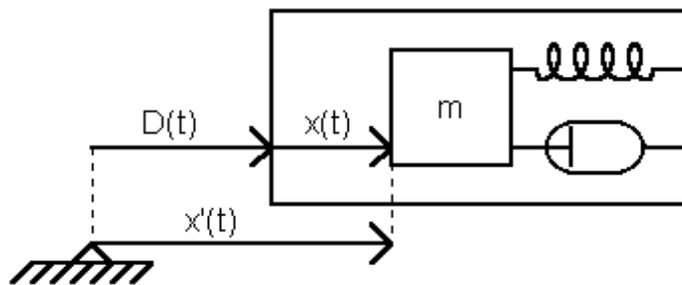


Figura 5.46:

$$Xx'(t) = x(t) + D(t)$$

$$\frac{d^2 x'(t)}{dt^2} = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \underbrace{\frac{d^2 D(t)}{dt^2}}_{a(t)}$$

Equazione del moto della massa m nel riferimento inerziale :

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x'(t)}{dt^2} &= F \\ m \frac{d^2 x'(t)}{dt^2} &= F - ma \\ m \frac{d^2 x'(t)}{dt^2} &= F + F_{pseudo} \quad (*) \end{aligned}$$

(*) equazione del moto nel sistema non inerziale dove compare la pseudo forza $F_{pseudo} = -ma$

Il moto della massa relativo al contenitore è descritto da :

$$\begin{aligned} F = \text{forza elastica} + \text{forza d'attrito} &= -kx - \lambda \frac{dx}{dt} \\ m \frac{d^2 x'(t)}{dt^2} + \lambda \frac{dx}{dt} + kx &= F_{pseudo} = -ma(t) \end{aligned}$$

Il moto relativo massa-contenitore è un moto inerziale smorzato elastico sotto una forza proporzionale all'accelerazione.

$$a(t) = 0 \implies x = \text{cost}$$

$$\frac{m}{k} = \frac{1}{\omega_n^2}, \quad \frac{\lambda}{k} = \frac{2\xi}{\omega_n} \implies \frac{x(s)}{a(s)} = \frac{-\frac{1}{\omega_n^2}}{1 + \frac{2\xi}{\omega_n}s + \frac{1}{\omega_n^2}s^2}$$

Aumentando la massa aumenta la sensibilità ma diminuisce la frequenza di funzionamento. *fig.3.17 Mensola utilizzabile all'interno di uno strumento di misura di deformazione o di un accelerometro; fig.3.25 Accelerometro di tipo integrato : la massa di silicio (grigia) si deflette e varia la propria resistività.*

5.12 Elementi capacitivi sensibili allo spostamento

(*fig.15 fig.8.5*)

$$C = \varepsilon \frac{A}{d}$$

Possiamo agire su A, d, ε per variare la capacità, ottenendo :

- agendo su A

$$C = \varepsilon \frac{A - xw}{d} \quad (x = \text{spostamento}, w = \text{spessore})$$

- agendo su d

$$C = \varepsilon \frac{A}{d + x}$$

- agendo su ε

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_1 \frac{A_1}{d} wx + \varepsilon_0 \varepsilon_2 \frac{A_2}{d} w(l-x) = \frac{w}{d} \varepsilon_0 [\varepsilon_2 l - (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)x]$$

Uno schema interessante è quello relativo alla variazione di d (f.15 fig.8.5) :

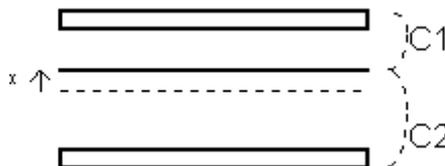


Figura 5.47: Schema relativo alla variazione di d

$$C_1 = \frac{\varepsilon A}{d-x}, \quad C_2 = \frac{\varepsilon A}{d+x}$$

Se la misura di capacità è effettuata impiegando un ponte di Wheatstone...

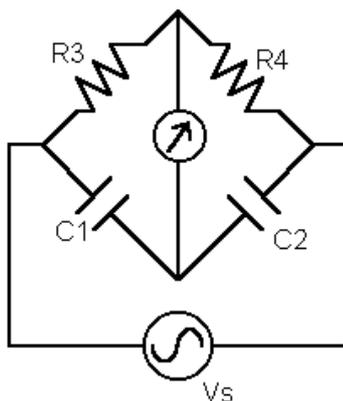


Figura 5.48: Misura della capacità usando un ponte di Wheatstone

... la tensione sullo strumento indicatore è

$$V_i = V_s \left[\frac{C_2}{C_1 + C_2} - \frac{R_3}{R_3 + R_4} \right]$$

Se $R_1 = R_2$ e C_1, C_2 sono quelle date :

$$V_i = V_s \left[\frac{\frac{1}{d-x}}{\frac{1}{d+x} + \frac{1}{d-x}} - \frac{1}{2} \right] = V_s \frac{x}{2d} \implies \text{relazione lineare } \frac{V}{x}$$

Sensibilità :

$$\frac{\Delta V_i}{V_s} = \frac{\Delta x}{2d} \implies \Delta x = 2d \left(\frac{\Delta V_i}{V_s} \right)$$

Misurando direttamente la capacità, la sensibilità è

$$\Delta C = -\frac{\varepsilon A}{(d+x)^2} \Delta x = -\frac{\varepsilon A}{d} \frac{\Delta x}{d} \implies \Delta x = -d \frac{\Delta C}{C} \quad \left(\frac{\Delta C}{C} = -\frac{\Delta x}{d} \right)$$

f.15 fig.8.5(**) Strumento per la conversione : Pressione→Deformazione→Variazione di capacità
 fig.8.5(***) Misura del livello di liquido (non conduttore, con costante dielettrica ε):

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon h}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)} + \frac{2\pi\varepsilon_0(l-h)}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)} + \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)}[l + (\varepsilon - 1)h]$$

Si può usare uno schema a ponte per tramutare in tensione la misura di capacità:

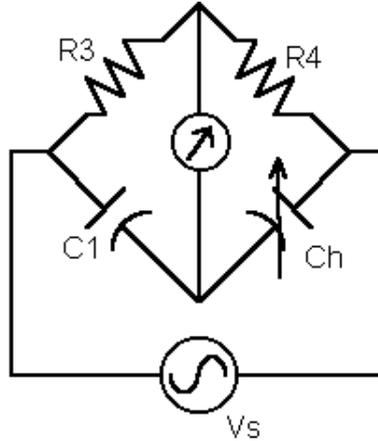


Figura 5.49: Schema a ponte per tramutare in tensione la misura di capacità

$$V_i = V_s \left[\frac{C_h}{C_1 + C_h} - \frac{R_3}{R_3 + R_4} \right]$$

Si sceglie che nella condizione di livello minimo : $C_{h-min} \implies V_i = 0$ (ponte in equilibrio)
 $\implies C_1 R_3 = C_{h-min} R_4 \quad Z_1 R_4 = Z_h R_3$

$$\implies V_i = V_s \left[\frac{1}{1 + \frac{C_{min} R_4}{C_h R_3}} - \frac{1}{1 + \frac{R_4}{R_3}} \right]$$

Se inoltre poniamo $\frac{R_4}{R_3} \gg 1$ possiamo scrivere la relazione come :

$$V_i = V_s \frac{R_3}{R_4} \left[\frac{C_h}{C_{h-min}} - 1 \right]$$

Che dipende linearmente da h e da una relazione V_i -h lineare. Tutto ciò avviene a discapito della sensibilità poichè $\frac{R_3}{R_4} \ll 1$.

f.15 8.5(#) Condensatore per la misura di umidità.

5.13 Dispositivi di tipo induttivo per la misura dello spostamento

Facciamo riferimento al concetto di **circuito magnetico**. Pensiamo ad un anello di materiale magnetico, sul quale è avvolta una spira percorsa da corrente :

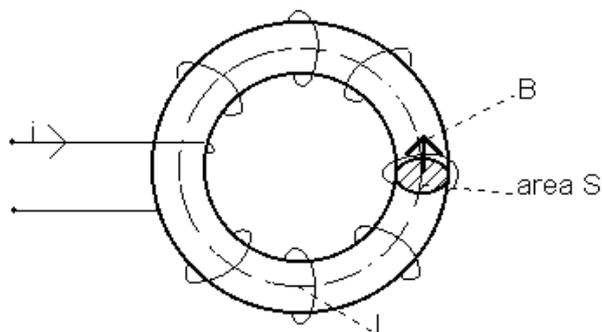


Figura 5.50: Anello di materiale magnetico avvolto da una spira percorsa da corrente

Se la permeabilità magnetica dell'anello è molto maggiore di quella dell'aria, il flusso disperso è circa nullo : le linee di flusso sono concentrate all'interno.

Flusso di induzione magnetica $\Phi = SB = (B \perp S) = S\mu H$ (μ =permeabilità magnetica).

Non abbiamo messo coordinate spaziali perchè il campo è uniforme lungo tutto l'anello. La circuitazione di H (prodotto H - spostamento) all'interno dell'anello è pari al numero di spire (n) concatenate per la corrente :

$$\oint \vec{H} d\vec{s} = ni \implies lH = ni \quad l = \text{lunghezza del percorso di integrazione}$$

$$\Phi = \frac{D\mu}{l} ni = \frac{1}{\frac{l}{S\mu}} ni$$

dove $R = \frac{l}{S\mu}$ = RILUTTANZA del circuito magnetico. ni = forza magneto motrice.

Circuito magnetico	Circuito elettrico
Φ	corrente
R	resistenza
ni	tensione

Dato un sistema magnetico - anche disomogeneo - individuato il flusso Φ si può scrivere una relazione nella forma :

$$\underbrace{\sum n \cdot i}_{\text{forze magneto motrici}} = \Phi(R_1 + R_2 + \dots)$$

Esempio (f.15 8-6 b)

Abbiamo tre regioni :

	nucleo (core)	traferro(air gap)	armatura (armature)
Permeabilità	μ_c	μ_o	μ_a
Riluttanza	R_c	R_o	R_a
Forza magneto-motrice	ni	0	0
Flusso	Φ	Φ	Φ
Lungh./Sez.	l_c, S_c	l_o, S_o	l_a, S_a

$$\oint \vec{H} d\vec{s} = ni \implies H_c l_c + H_0 l_0 + H_a l_a = ni$$

$$\left(H_c = \frac{B_c}{\mu_c} = \frac{\Phi}{\mu_c S_c} ; B_c = \frac{\Phi}{S_c} \right)$$

$$\implies \Phi \left(\frac{l_c}{\mu_c S_c} + \frac{l_0}{\mu_0 S_0} + \frac{l_a}{\mu_a S_a} \right) = ni \Leftrightarrow \Phi (R_c + R_o + R_a) = ni$$

Lo spostamento da misurare modifica $l_0 \implies$ modifica R_0 .

$$L = \text{induttanza} = \frac{\text{Flusso concatenato}}{\text{Corrente}} = \frac{n\Phi}{i}$$

$$= \frac{n}{i} \left(\frac{ni}{R_c + R_o + R_a} \right) = \frac{n^2}{R_c + R_o + R_a} = \frac{n^2}{(R_c + R_a) + R_o(x)}$$

La variazione di x si riflette sull'induttanza ($x = \frac{l_0}{2} = d$ - nel disegno 8-6) R_o dipende linearmente dalla lunghezza.

Abbiamo ottenuto una relazione tra la grandezza da misurare (spostamento) ed una grandezza elettrica misurabile (induttanza).

$$R_{totale} = R_c + R_o + R_a = (R_c + R_a) + \left(\frac{2}{\mu_t S_t} \right) x$$

(ricordiamo la relazione analitica $R = \frac{1}{\mu S}$, approssimata se il tubo di flusso non è a sezione uniforme S.)

$$\implies L = \frac{n^2}{(R_c + R_a) + \left(\frac{2}{\mu_t S_t} \right) x}$$

Con riferimento alla figura, diamo alcuni indici di grandezza :

- $n=500$ spire
- $R=2$ cm
- $r=0.5$ cm
- $t=0.5$ cm
- $\mu_c=100$

$$\implies (R_c + R_a) = 1.3 \cdot 10^7 \left[\frac{1}{H} \right], \quad \frac{2}{\mu_0 S_t} = 2 \cdot 10^{10} \left[\frac{1}{Hm} \right]$$

f.16 fig.8.8 Misuratore di velocità angolare. La variazione del flusso concatenato con la bobina avvolta sul magnete è dovuta alla variazione di posizione della ruota dentata; quando la bobina è vicino al

dente la riluttanza è elevata, viceversa è bassa. Il flusso varia in senso contrario alla riluttanza; la variazione di flusso genera una forza elettromotrice:

$$\begin{aligned} V &= -\frac{d\Phi_{concat.}}{dt} \\ \Phi_{concat.} &= a + b \cos n\theta \quad (a \text{ costante, } n=\# \text{ denti della ruota}) \\ V &= -bn \sin n\theta \frac{d\theta}{dt} \end{aligned}$$

Se $\theta = \omega t \implies V = -bn\omega \sin n\omega t$.

Sia l'ampiezza che la frequenza della forza elettromotrice variano con ω . Si può dunque risalire alla misura di ω misurando l'ampiezza o la frequenza (quest'ultima è meno affetta da errori e disturbi).

5.14 Trasformatore differenziale per la misura di spostamenti lineari (LVDT)

(f.16 fig.8.7, f.14 fig.10.22)

Si fa riferimento alla posizione di un elemento magnetico che influenza l'accoppiamento primario-secondario del trasformatore; nella posizione centrale i due avvolgimenti (opposti fra loro) danno la stessa risposta. L'accoppiamento sarà migliore con V_1 (V_2) spostando l'elemento verso V_1 (V_2). La dipendenza dell'accoppiamento sullo spostamento è non lineare per grossi spostamenti. Si misurano così spostamenti da 0.25mm a 10cm con una relazione di linearità valida a meno di qualche punto percentuale.

5.15 Sonde di corrente ad effetto Hall

Si sfrutta l'influenza del campo magnetico sul moto delle particelle mobili dei conduttori-portatori di carica (es. elettroni-lacune).

Legge di Ohm microscopica :

$$\vec{E} = \rho \vec{J}$$

(rispettivamente campo elettrico = resistività · densità di corrente). In presenza di campo magnetico ρ viene a dipendere da \vec{B} (vettore induzione magnetica).

Si può dimostrare che la dipendenza da ρ da \vec{B} presenta due componenti :

- una simmetrica $\rho_{sim} = \rho_0 + \beta_1 B^2 + \dots$ (potenze pari di B)
- una antisimmetrica $\rho_{antisimm} = R_H \vec{B} \wedge + \beta_2 B^2 \vec{B} + \dots$ (potenze dispari di B)

(R_H è il coefficiente di Hall e \wedge è il simbolo di prodotto vettore)

Di entrambe le componenti consideriamo solo il primo termine, trascurando i rimanenti:

$$\vec{E} = \rho_0 \vec{J} + R_H \vec{B} \wedge \vec{J}$$

(relazione valida in presenza di un piccolo campo B; il coefficiente di Hall è circa $;\frac{\Omega m}{T}$ nei semiconduttori)

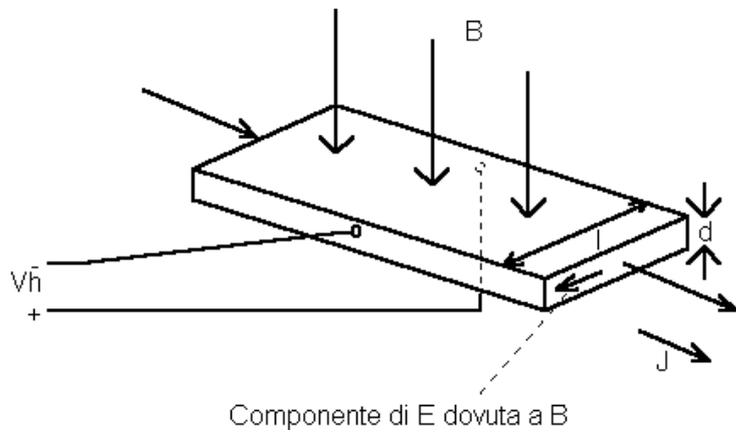


Figura 5.51: Lamina percorsa dalla corrente misurata nella sonda (diversa dalla corrente che voglio conoscere)

Misuriamo la componente aggiuntiva di campo elettrico come differenza di potenziale.

$$E_H = R_H B J$$

$$V_H = E_H l = \left(R_H B \frac{I}{d} \right) l$$

La sonda fornisce una tensione che dipende dal campo magnetico B e dalla corrente di eccitazione della sonda stessa (I). Questa è quindi una sonda di campo che risponde al prodotto B*I.

5.16 Sensori di umidità **

Sono basati sull'influenza dell'assorbimento -adsorbimento (*) - di vapore acqueo, sulle caratteristiche dielettriche o resistive del materiale impiegato; nel primo caso -il più comune - si studia una variazione di capacità, nel secondo una variazione di resistenza.

(*) Si parla di adsorbimento con riferimento al fenomeno di legame delle particelle di gas o vapore al materiale, mediante forze fisiche e non chimiche, cioè senza reazione chimica.

E' possibile integrare un sensore di umidità capacitivo realizzando un condensatore con dielettrico a resina porosa in un circuito integrato (f.15,fig.8.5).

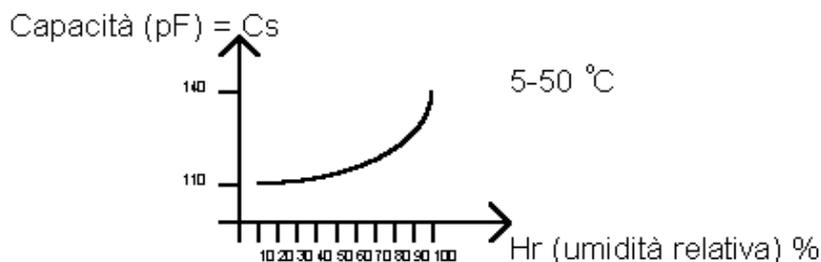


Figura 5.52: Grafico

$$C_s = C_0 \left[1 + 0.4 \left(\frac{H_r \%}{100} \right)^{1.4} \right] \quad \text{hbox(relazione empirica)}$$

H_{ass} = umidità assoluta = densità di vapore acqueo = $\frac{\text{quantità di vapore}}{\text{volume}}$.

H_r = umidità relativa = $\frac{H_{ass}}{H_{ass-max}} \% = \frac{\text{quantità presente}}{\text{quantità massima che può essere presente}} \%.$

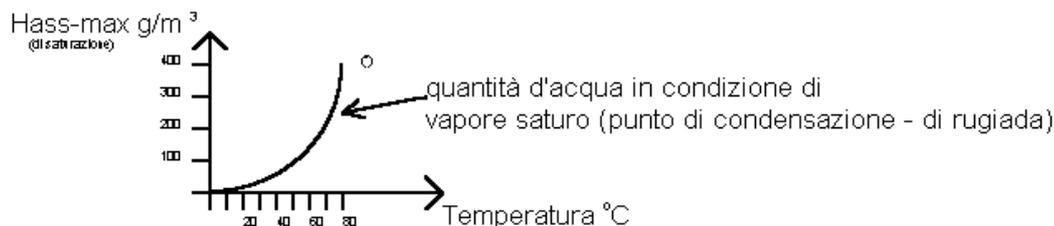


Figura 5.53:

L'umidità relativa è una frazione percentuale della massima quantità di vapore alla temperatura di lavoro.

Determinazione di H_r % :

1. occorre conoscere la temperatura di lavoro.
2. dalle tabelle (curva (*)) si determina $H_{ass-max}$ alla temperatura di lavoro.
3. si determina H_{ass} : si raffredda l'aria nel suo contenitore finché non si osserva l'inizio della condensazione, e si rileva la temperatura corrispondente a tale evento. Ancora dalle curve di saturazione si determina H_{ass} .

Il rapporto tra le due quantità trovate fornisce H_r .

Esempio

Lavoriamo a $50^\circ \Rightarrow H_{sat(50)} = A.$

Raffreddando il campione ho condensazione a $30^\circ \Rightarrow H_{sat(30)} = B.$

$$H_r = \frac{A}{B} \%$$

(Esistono dispositivi integrati che effettuano queste operazioni, raffreddando mediante effetto Peltier, ed individuando la condensazione grazie a misurazioni acustiche).

Parte III

Struttura generale di un sistema di misura

Capitolo 6

Struttura generale di un sistema di misura

L'obiettivo di un sistema di misura è quello di fornire all'osservatore un'indicazione sullo stato di un sistema fisico.

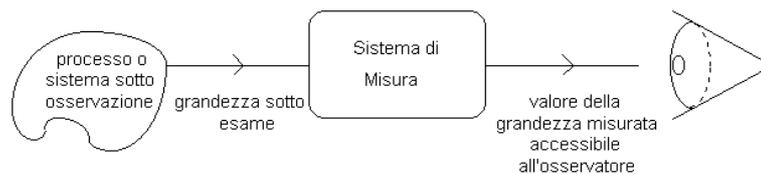


Figura 6.1:

In un sistema di misura possiamo distinguere, in generale, 4 parti:



Figura 6.2:

Esempio : accelerometro

6.1 Caratteristiche statiche di un sistema di misura

- *Campo* (range) : valori tipici, massimi e minimi, dell'ingresso e dell'uscita ; $I_{min}, I_{max}, O_{min}, O_{max}$.

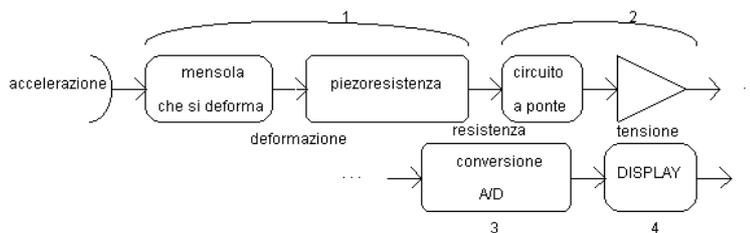


Figura 6.3:

- In generale si vorrà una *relazione I/O lineare* :

$$O - O_{min} = k(I - I_{min})$$

$$k = \frac{O_{max} - O_{min}}{I_{max} - I_{min}}$$

ovvero $O = kI + a$ $a = O_{min} - kI_{min}$

- In presenza di non linearità, possiamo definire uno *scostamento dalla relazione lineare* = $N(I)$.

$$N(I) = O(I) - (kI + a)$$

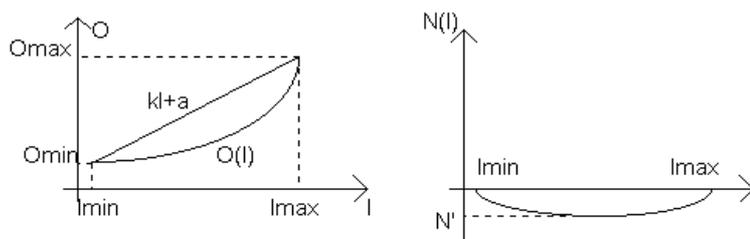


Figura 6.4:

massima non linearità = $\frac{N'}{O_{max} - O_{min}} \%$

- Sensibilità $\frac{\Delta O(I)}{\Delta I}$

- Fattori ambientali : temperatura ambiente, pressione, umidità...

- Effetto modificante : effetto tale da influenzare la costante 'k' nella relazione lineare.

- Effetto interferente : effetto tale da influenzare il parametro 'a' nella relazione lineare.

6.2 Tipi di misurazioni

Con il termine misurazione indichiamo il procedimento con il quale arrivare alla misura (che invece è il risultato dell'operazione di misurazione).

Misurare una grandezza vuol dire trovare in che rapporto essa si trova rispetto ad una grandezza di riferimento.

La grandezza di riferimento è chiamata unità di misura.

- - $\hat{g} = g[\hat{g}]$
- \hat{g} = grandezza fisica da misurare

- g =misura in forma di numero
- $[\hat{g}]$ =unità di misura (grandezza dello stesso tipo di g)

Esempio

- $\hat{g} = 1.5\text{Volt}$
- \hat{g} =grandezza incognita, $g=1.5, [\hat{g}] =\text{Volts}$

L'interpretazione diretta della definizione di misura si riferisce alle *misurazioni dirette* o *di confronto* o *relative*.

Un esempio di misura diretta o per confronto si ha nelle misure di tensione con il metodo potenziometrico : confronto diretto tra la tensione incognita V_x e di riferimento V_{ref} .

Nota : nel confronto diretto il confronto non è sempre fatto rispetto all'unità di misura, ma, frequentemente, si impiegano grandezze campione o *campioni*, grandezze di valore noto con precisione.

Lo schema di misurazione è il seguente $\hat{g}_c = g_c[\hat{g}] \Rightarrow \hat{g} = n\hat{g}_c = ng_c[\hat{g}]$ essendo la prima uguaglianza una misura di g rispetto al campione, la seconda rispetto all'unità di misura.

(un esempio di campione è la pila di Weston : $1.08130V \pm 1\mu V, 20^0C$)

Con riferimento a leggi (geometriche e) fisiche si può esprimere il valore di una grandezza in funzione di altre grandezze fisiche.

Si parla di *misurazioni indirette* : il confronto non avviene tra grandezze fisiche della stessa specie.

- $\hat{y} = \hat{y}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \dots)$
- La relazione $\hat{y}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \dots)$ esprime una definizione fisica accurata (velocità= $\frac{\text{spazio}}{\text{tempo}}$, $R = \frac{\text{tensione}}{\text{corrente}}$)
- \hat{y} =grandezza da misurare
- $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \dots$ =grandezze (di tipo diverso da y) oggetto di misurazione

Si hanno *misurazione mediante strumenti tarati* quando il valore g della grandezza misurata è disponibile sull'indice dello strumento. La corrispondenza tra posizione dell'indice e valore di g è stabilita in fase di costruzione (taratura) dello strumento, in relazione a strumenti tarati e/o a campioni (catena di tracciabilità).

6.3 Misure ed errori

Intendiamo per errori le cause che fanno sì che l'indicazione della misura non corrisponda esattamente alla grandezza da misurare.

Esistono concetti distinti :

- 1) errori della procedura / strumenti di misura; i risultati della misurazione possono essere diversi se si ripete la procedura di misurazione.
- 2) variazioni incontrollate della grandezza \hat{g} (fluttuazioni).

Consideriamo solo i primi.

- a) *Precisione* di misura: ripetibilità e consistenza dei risultati della misurazione: g_1, g_2, g_3, \dots
 - $R = \frac{V}{i}$ $i = \text{"vera"}, V = v_R + \text{caduta sull'amperometro}$
 - \Rightarrow errore sistematico
 - $\Delta g = \frac{g_{i-\max} - g_{i-\min}}{2}$
 - Δg è tanto più piccola quanto più lo strumento è preciso (ne quantifica la precisione).
- b) *Accuratezza* : differenza tra il valore misurato ed il valore vero (definizione accettabile per fluttuazioni trascurabili).

accuratezza \neq precisione

6.3.1 Sorgenti di errore

- errori sistematici
- errori casuali
- errori grossolani

Errori sistematici

Un errore è sistematico se, fissate le condizioni sperimentali, in grandezza e segno ha la stessa influenza sul risultato della misura.

Esempio

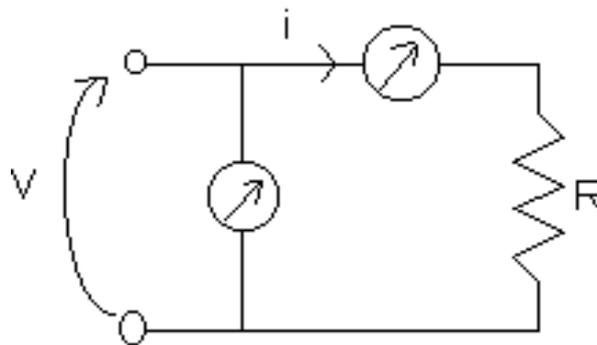


Figura 6.5:

$$R = \frac{V}{i} \quad i = \text{"vera"} \quad V = v_R + \text{caduta sull'amperometro}$$

⇒ errore sistematico

Errori casuali

Errori la cui influenza sulla misura può cambiare in grandezza e segno se si ripete la procedura di misurazione.

(Nota : le condizioni ambientali sono sorgenti di errori casuali se non vengono monitorate o se non si conosce la loro influenza sulla grandezza da misurare, diversamente possono essere sorgenti di errore sistematico).

Errori grossolani

Riguardano l'operatore o guasti dello strumento.

Risultato di una misurazione

La distinzione tra errori sistematici ed errori casuali si riflette sulla distinzione tra accuratezza e precisione. L'accuratezza è influenzata da tutti gli errori, la precisione è influenzata dagli errori casuali (quelli sistematici non contribuiscono alla variazione dei risultati).

Vediamo come si esprime il risultato di una misura.

$$g = g_{medio} \pm \Delta g$$

Nel caso di strumenti tarati Δg è indicato come valore percentuale del fondo scala.

Si definisce *errore limite*: (accuratezza Tale specificazione di errore vale per qualsiasi valore di g , ovvero l'influenza relativa dell'errore dello strumento cresce al diminuire di g :

errore relativo = $\frac{\text{errore limite}}{g} = \frac{(\text{acc.}\%)\cdot(\text{fondoscala})}{g} \Rightarrow$ per questo si cerca di usare gli strumenti in prossimità del fondoscala.

Una scrittura più completa è la seguente: errore limite: (accuratezza (per esempio nei voltmetri digitali la specificazione dell'errore tiene conto di un errore fisso pari alla cifra meno significativa) Convenzionalmente si impiega l'indicazione della misura senza evidenziare Δg , indicando la misura soltanto fino alla cifra meno significativa influenzata dall'errore Δg .

Esempio

- Misura = 13.57V \Rightarrow la terza cifra decimale è influenzata dall'errore, quelle indicate no.
- 13.570 \neq 13.57 (!!)
- Nel primo numero indicato la cifra influenzata dall'errore è la quarta decimale.

6.4 Propagazione degli errori

Vediamo come si impiegano i risultati della misura in presenza di errore.

Data $y(x_1, x_2, x_3, \dots)$, come $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$ influenzano la determinazione di y ?

$\Delta y =$ (per errori infinitesimi) = $\frac{\partial y}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} \Delta x_2 + \frac{\partial y}{\partial x_3} \Delta x_3 + \dots$

Stima pessimistica (worst case): noi conosciamo i moduli, quindi sommiamo i contributi in modulo:

$$|\Delta y| = \left| \frac{\partial y}{\partial x_1} \right| |\Delta x_1| + \left| \frac{\partial y}{\partial x_2} \right| |\Delta x_2| + \left| \frac{\partial y}{\partial x_3} \right| |\Delta x_3| + \dots$$

Esempio

- somma $S = a + b$ $\Delta S = \Delta a + \Delta b$
- differenza $D = a - b$ $\Delta D = \Delta a + \Delta b$
- prodotto $P = ab$ $\Delta P = b\Delta a + a\Delta b$
- quoziente $Q = a/b$ $\Delta Q = (a\Delta b + b\Delta a)/b^2$

Esempio

- $y = a^n b^m c^p \dots$ $\Delta y = |n a^{n-1} b^m c^p| \Delta a + \dots$
- $\frac{\Delta y}{y}$ = effetto relativo nella propagazione dell'errore = $n \frac{\Delta a}{a} + m \frac{\Delta b}{b} + p \frac{\Delta c}{c} + \dots$
- L'errore relativo risultante dipende dall'errore relativo più grande tra a,b,c,...

Appendici

Appendice A

Sistema Internazionale

A.1 Sistema Internazionale

Il sistema internazionale é stato formulato nella XI Conferenza Generale di Pesi e Misure, tenutasi a Parigi dall'11 al 20 ottobre 1960, considerata la Risoluzione 6^a della X CGPM, con la quale essa ha adottato le sei unitá di misura che devono servire di base per l' istituzione di un sistema pratico di misura per le relazioni internazionali, considerata la risoluzione 3^a del Comitato Internazionale Pesi e Misure del 1956, e le Raccomandazioni adottate dal CIPM nel 1958, concernenti l' abbreviazione del nome di questo sistema e i prefissi per la formazione dei multipli e sottomultipli della unitá

DECIDE

I. Il sistema metrico fondato sulle sette unitá di misura base di cui sopra é designato con il nome di
« *Sistema Internazionale di Unitá* »

II. L'abbreviazione internazionale di detto sistema é « SI »

Il Sistema Internazionale, adottato nella XI CGPM e completato alla XIV CGPM (1971), alla XV CGPM (1975), alla XVI CGPM (1979), e alla XVII CGPM (1983) con alcune nuove adozioni e modifiche di precedenti definizioni, é fondato sulla adozione di sette grandezze fondamentali: le quattro del sistema mksA razionalizzato o *sistema Giorgi*, e cioé la *lunghezza*, la *massa*, *gli intervalli di tempo*, *l' intensitá di corrente elettrica*, alle quali vengono aggiunte *la temperatura*, *l' intensitá luminosa* e *la quantitá di sostanza*. Le corrispondenti unitá di misura vengono cosí definite:

Unitá di lunghezza: il **metro** (m), ovvero la distanza percorsa nel vuoto dalla luce nell' intervallo di tempo di $(1/299\,792\,458)$ s (XVII CGPM, 1983)

Unitá di massa: il **kilogrammo** (kg), ovvero la massa del prototipo di platino-iridio, sanzionato dalla I CGPM del 1889 e depositato presso il Bureau International des Poids et Mesures, nei sotterranei del padiglione di Breteuil, a Sèvres (III CGPM, 1901)

Unitá di intervalli di tempo: il **secondo** (s), ovvero la durata di $9\,192\,631\,770$ oscillazioni della radiazione emessa dall' atomo di cesio 133 (^{133}Cs) nello stato fondamentale $^2S_{1/2}$ nella transizione dal livello iperfine $F=4, M=0$ al livello iperfine $F=3, M=0$ (XIII CGPM, 1967)

Unitá di intensitá di corrente elettrica: l'**ampere** (A), ovvero la corrente elettrica che, fluendo in due conduttori rettilinei, paralleli, indefinitamente lunghi, di sezione circolare trascurabile, posti a distanza di un metro nel vuoto, determina tra essi una forza di $2 * 10^{-7}$ N per metro di conduttore (IX CGPM, 1948).

Unitá di temperatura: il **kelvin** (K), ovvero la frazione $1/273,16$ della temperatura termodinamica del punto triplo dell'acqua (IX CGPM, 1948).

Unitá di intensitá luminosa: la **candela** (cd) é l'intensitá luminosa, in una data direzione, di una sorgente che emette una radiazione monocromatica di frequenza $540 * 10^{12}$ Hz e la cui intensitá energetica in tale direzione é di $(1/683)$ W/sr (XVI CGPM, 1979).

Unitá di quantitá di sostanza: la **mole** (mol), ovvero la quantitá di sostanza di un sistema che contiene tante entitá elementari quanti sono gli atomi in 0,012 kg di carbonio 12 (^{12}C) (XIV CGPM, 1971).
Avvertenza : quando si usa la mole, le entitá elementari devono essere di volta in volta specificate: possono essere atomi, molecole, ioni, elettroni, altre particelle o raggruppamenti specificati di tali particelle.

Unitá supplementari

Accanto alle sette unitá fondamentali vengono definite nel SI due unitá

unitá di angolo piano: il **radiante** (rad), ovvero quell' angolo piano con il vertice nel centro della circonferenza che sottende un arco di lunghezza uguale al raggio;

unitá di angolo solido: lo **steradiano** (sr), ovvero quell' angolo solido con il vertice nel centro della sfera che sottende una calotta sferica la cui area é uguale a quella di un quadrato con lati uguali al raggio della sfera.

A.2 Prefissi dei multipli e sottomultipli delle unitá di misura

Dal momento che talune unitá risultano di scomodo uso perché troppo grandi (vedi il farad, unitá di capacitá) o troppo piccole (vedi il pascal, unitá di pressione) o comunque per scrivere in modo piú sintetico il risultato numerico di una misura il SI prevede anche un certo numero di prefissi di multipli e sottomultipli delle unitá e relativi simboli (tab 1).

Moltiplica per	Nome	Simbolo
10^{24}	yotta-	Y-
10^{21}	zetta-	Z-
10^{18}	exa-	E-
10^{15}	peta-	P-
10^{12}	tera-	T-
10^9	giga-	G-
10^6	mega-	M-
10^3	kilo-	k-
10^2	etto-	h-
10	deca-	da-
10^{-1}	deci-	d-
10^{-2}	centi-	c-
10^{-3}	milli-	m-
10^{-6}	micro-	μ -
10^{-9}	nano-	n-
10^{-12}	pico-	p-
10^{-15}	femto-	f-
10^{-18}	atto-	a-
10^{-21}	zepto-	z-
10^{-24}	yocto-	y-

Non tutti i prefissi elencati nella tabella 1 sono usati in pratica: i piú diffusi sono quelli il cui esponente é multiplo positivo o negativo di 3 (kilo, milli, micro, ...), ma anche tra questi vengono usati molto raramente il tera, il femto e l' atto. In tutti i casi, anche se l' uso dei prefissi davanti al simbolo delle unita di misura rende la scritta piú compatta, ne é sconsigliato l' uso in quei casi nei quali si possano creare equivoci: per esempio il prefisso m- potrebbe confondersi col simbolo di metro, il prefisso T- col simbolo di tesla, ecc.

A.3 Norme di scrittura del SI

Il SI prevede una serie di norme di scrittura delle unita di misura e dei relativi simboli che possiamo cosí riassumere per sommi capi:

1. Le unita devono sempre essere scritte in carattere tondo, minuscolo, prive di accenti e di altri segni grafici.
2. I simboli si devono scrivere con l' iniziale minuscola, tranne quelli di unita derivanti da nomi propri: cosí K per kelvin, ma cd per candela.
3. I simboli non devono mai essere seguiti dal punto: perció m e non m., kg e non kg.
4. I simboli devono sempre seguire il valore numerico e mai precederlo: cosí 3,5 m e non m 3,5.
5. L' unita di misura, quando usata in un contesto discorsivo, deve sempre essere scritta per esteso: cosí si dirá « il pascal é l' unita SI di pressione » e non « il Pa é l' unita SI di pressione ».
6. Nella scrittura del simbolo di unita composte da piú unita non devono usarsi trattini, ma solo spazi bianchi o punti a metá altezza: cosí si dovrá scrivere N m, oppure N•m, ma non N-m.

Non é superfluo sottolineare che dal momento che il SI é stato adottato in Italia da un DPR e da una legge, le norme di cui sopra devono essere obbligatoriamente rispettate, pena l' invalidazione di atti e documenti di qualsiasi genere

A.4 Grandezze derivate del SI e loro unitá di misura

Una volta fissate le sette grandezze e le corrispondenti unitá fondamentali del SI, é agevole ricavare tutte le altre grandezze derivate e definire le corrispondenti unitá di misura. Si inizia con la definizione di quelle grandezze derivate le cui unitá hanno un nome particolare (v. tab. 2). La XI CGPM suggerí (tab. 3) l' adozione di un certo numero di altre unitá derivate. Altre unitá SI di grandezze derivate sono riportate nella tabella 4.

Grandezza	unitá di misura e simbolo	Definizione
Frequenza	hertz (Hz)	Frequenza di un fenomeno periodico con periodo di 1 s. $1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$
Forza	newton (N)	Forza che, applicata a un corpo di massa 1 kg gli imprime un' accelerazione di 1 m/s^2 nella stessa direzione della forza. $1 \text{ N} = 1 \text{ kg m/s}^2$
Energia e Lavoro	joule (J)	Lavoro compiuto dalla forza di 1 N quando il suo punto di applicazione si sposta di 1 m nella direzione della forza. $1 \text{ J} = 1 \text{ N m}$
Pressione	pascal (Pa)	Pressione esercitata dalla forza di 1 N applicata perpendicolarmente a una superficie di 1 m^2 . $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N /m}^2$
Potenza	watt (W)	Potenza che dá origine alla produzione (o dissipazione) di energia di 1 J in 1 s. $1 \text{ W} = 1 \text{ J / s}$
Carica elettrica	coulomb (C)	Quantitá di elettricitá trasportata in 1 s dalla corrente di 1 A. $1 \text{ C} = 1 \text{ A s}$
Potenziale elettrico (differenza di potenziale, forza elettromotrice, tensione)	volt (V)	Differenza di potenziale esistente tra due punti di un conduttore , che percorso dalla corrente costante di 1 A, dissipa la potenza di 1 W, senza che nel conduttore avvengano altri fenomeni energetici oltre all' effetto Joule. $1 \text{ V} = 1 \text{ W / A}$
Capacitá elettrica	farad (F)	Capacitá di un condensatore tra le cui armature appare la differenza di potenziale di 1 V, quando su esso é posta la carica di 1 C. $1 \text{ F} = 1 \text{ C / V}$
Resistenza elettrica	ohm (Ω)	Resistenza elettrica esistente tra due punti di un conduttore ai quali é applicata la differenza di potenziale di 1 V, quando il conduttore é percorso dalla corrente di 1 A e non é sede di alcuna forza elettromotrice $1 \Omega = 1 \text{ V / A}$
Induttanza elettrica	henry (H)	Induttanza di una spira nella quale una variazione uniforme di intensitá di corrente di 1 A/s produce l' insorgere di una forza elettromotrice di 1 V. $1 \text{ H} = 1 \text{ V s / A}$
Flusso magnetico	weber (Wb)	Flusso magnetico che, concatenato con una sola spira, induce in essa la forza elettromotrice di 1 V, annullandosi a velocitá costante in 1 s. $1 \text{ Wb} = 1 \text{ V s}$

Tabella 2-Grandezze derivate nel SI e loro unità di misura(CONTINUA)

Grandezza	unità di misura e simbolo	Definizione
Conduttanza elettrica	siemens (S)	Conduttanza elettrica di un conduttore la cui resistenza elettrica è 1Ω $1 \text{ S} = 1 \Omega^{-1}$
Flusso luminoso	lumen (lm)	Flusso luminoso emesso nell'angolo solido di 1 sr da una sorgente puntiforme isotropa di intensità 1 cd . $1 \text{ lm} = 1 \text{ cd sr}$
Illuminamento	lux (lx)	Illuminamento prodotto su una superficie di area 1 m^2 dal flusso luminoso di 1 lm incidente perpendicolarmente. $1 \text{ lm} = 1 \text{ lux} / \text{m}^2$
Luminanza (o brillantezza)	nit (nt)	Luminanza di una superficie di area 1 m^2 che emette in direzione perpendicolare radiazioni con intensità luminosa di 1 cd . $1 \text{ nt} = 1 \text{ cd}/\text{m}^2$
Induzione magnetica	tesla (T)	Induzione magnetica uniforme che attraversando perpendicolarmente una superficie piana di area 1 m^2 , produce attraverso questa superficie un flusso magnetico di 1 Wb . $1 \text{ T} = 1 \text{ Wb}/\text{m}^2$
Attività	becquerel (Bq)	Attività di una sostanza radioattiva che subisce un decadimento al secondo. $1 \text{ Bq} = 1 \text{ s}^{-1}$
Dose assorbita	gray (Gy)	Dose assorbita di qualsiasi radiazione ionizzante che cede 1 J di energia per ogni kilogrammo di materia attraversata $1 \text{ Gy} = 1 \text{ J}/\text{kg}$
Equivalente di dose	sievert (Sv)	Dose assorbita di qualsiasi radiazione ionizzante avente la stessa efficacia biologica di 1 Gy di raggi X

Tabella 3-Altre unità derivate del SI

Grandezza	Simbolo	Unità	Note
Superficie	A	m^2	-
Volume	V	m^3	-
Massa volumica (densità)	ρ	kg m^{-3}	-
Velocità	v	m s^{-1}	-
Velocità angolare	ω	rad s^{-1}	-
Accelerazione	a	m s^{-2}	-
Accelerazione angolare	γ	rad s^{-2}	-
Viscosità dinamica	η	N s m^{-2}	Detta anche decapoise (daP)
Viscosità cinematica	ν	$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$	-
Intensità di campo elettrico	E	V m^{-1}	Anche N/C
Intensità di campo magnetico	H	A m^{-1}	Anche N/Wb

Tabella 4-*Altre unitá di grandezze derivate nel SI*

Grandezza	Simbolo	Unitá	Note
Accelerazione areolare	\dot{A}	$m^2 s^{-2}$	-
Affollamento molecolare	N	m^{-3}	-
Ammettenza acustica	y_a	$m^4 s k g^{-1}$	-
- elettrica	Y	S	-
Azione	A	$J s$	-
Calore latente	c_l	$J k g^{-1}$	-
- specifico	c	$J k g^{-1} K^{-1}$	-
- - molare	c_p, c_v	$J mol^{-1} K^{-1}$	-
Cammino libero medio	λ	m	-
Capacitá acustica	c_a	$m^5 N^{-1}$	-
- termica	C	$J K^{-1}$	-
Cedevolezza meccanica	C_m	$m N^{-1}$	-
Cifra di perdita	p	$W k g^{-1}$	-
Coeffic. di allungamento	α	$m^2 N^{-1}$	-
- - assorbimento	μ	m^{-1}	-
- - comprimibilitá	K	$m^2 N^{-1}$	-
- - diffusione	D	$m^2 s^{-1}$	-
- - dilatazione termica	$\alpha, \beta, \lambda, \gamma$	K^{-1}	-
- - evaporazione	k	$m^{-2} s^{-1}$	-
- - flessione	ε	$m^2 N^{-1}$	-
- - Hall	R	$m^3 A^{-1} s^{-1}$	-
- - Joule-Kelvin	μ	$K m^2 N^{-1}$	-
- - Peltier	π	V	-
- - ricombinazione	α	s^{-1}	-
- - scambio termico	k	$W m^{-2} K^{-1}$	-
- - scorrimento	γ	$m^2 N^{-1}$	-
- - smorzamento	δ	s^{-1}	-
- - temperatura	α	K^{-1}	-
- - torsione	k	$m^2 N^{-1}$	-
- liminare	α	$W m^{-2} K^{-1}$	-
- piezoelettrico	d	$m^2 V^{-1}$	-
Conduttanza acustica	g_a	$m^4 s k g^{-1}$	-
- termica	g_t	$W K^{-1}$	-
Conduttivitá acustica	γ_a	$m^3 s k g^{-1}$	-
- elettrica	γ	$S m^{-1}$	-
- termica	λ	$W m^{-1} K^{-1}$	-
Corrente di spostamento	I_s	A	-
Costante dielettrica	ε	$F m^{-1}$	-
- di Richardson	A	$A m^{-2} K^{-2}$	-
- - tempo	τ	s	-
- - torsione	K	$N M rad^{-1}$	-
Covolume molare	b	$m^3 mol^{-1}$	-
Densitá di carica lineare	λ	$C m^{-1}$	-
- - - superficiale	σ	$C m^{-2}$	-
- - - volumica	ϱ	$C m^{-3}$	-
- - corrente	J	$A m^{-2}$	-
- - energia volumica	w	$J m^{-3}$	-

Tabella 4- Altre unità di grandezze derivate nel SI (CONTINUA)

Grandezza	Simbolo	Unità	Note
Densità di flusso termico	J_q	$W m^{-2}$	-
Differenza di fase	φ	rad	-
Diffusività termica	α	$m^2 s^{-1}$	-
Efficienza luminosa	η	$lm W^{-1}$	-
Emissività integrale	e	$W m^{-2}$	-
- specifica	e_v	$J m^{-2}$	-
Energia libera	F	J	-
Entalpia	H	J	-
Entropia	S	$J K^{-1}$	-
Esposizione luminosa	e	lx s	-
Fluidità cinematica	f_c	$s m^{-2}$	-
- dinamica	f_d	$m^2 N^{-1} s^{-1}$	Anche daP^{-1}
Flusso elettrico	ϕ_E	V m	-
- gravitazionale	ϕ_g	$m^3 s^{-2}$	-
- termico	ϕ_q	W	-
Forza magnetomotrice	f_m	A	-
Impedenza acustica	z_a	$kg m^{-4} s^{-1}$	-
- specifica	z_s	($kg m^{-2} s^{-1}$) $N s m^{-3}$	-
- elettrica	Z	Ω	-
- meccanica	z_m	$kg s^{-1}$	-
Impulso	q	$kg m s^{-1}$	-
- angolare	J	$kg m^2 s^{-1}$	-
Inertanza	m_a	$kg m^{-4}$	Detta anche massa acustica
Intensità acustica	J_a	$W m^{-2}$	-
- del campo gravitazionale	H	$m s^{-2}$	-
Magnetizzazione	M	$A m^{-1}$	-
Mobilità elettrica	μ	$A m^{-1}$	-
Modulo di comprimibilità	χ	$N m^{-2}$	-
- - Coulomb	G	$N m^{-2}$	-
- - flessione	E_f	$N m^{-2}$	-
- - scorrimento	E_s	$N m^{-2}$	-
- - torsione	E_t	$N m^{-2}$	-
- - Young	E	$N m^{-2}$	-
Momento angolare	P	J s	-
- d' inerzia	I	$kg m^2$	-
- elettrico di dipolo	m_e	C m	-
- - - quadrupolo	Q_e	Cm^2	-
- elettromagnetico	m	Am^2	-
- magnetico di dipolo	m_m	Wb m	-
- - - quadrupolo	Q_m	$A m^3$	-
- meccanico	M	N m	Pur essendo $1 N m = 1 J$, M non viene mai espresso in joule

Tabella 4- Altre unitá di grandezze derivate nel SI (CONTINUA)

Grandezza	Simbolo	Unitá	Note
Mutua induttanza	M	H	-
Numero di Avogadro	N_o	mol^{-1}	-
- d'onda	ν	m^{-1}	-
Periodo	T	s	-
Permeabilitá magnetica	μ	H m^{-1}	-
Permeanza	Λ	H	-
Permeattivitá dielettrica	-	-	vedi costante dielettrica
Peso	P	N	-
Peso specifico	γ	N m^{-3}	-
Polarizzabilitá	α	F m^2	Comunemente α é definita come rapporto tra il momento elettrico di dipolo p e il campo elettrico E; qualche autore preferisce definirla come $(p/\epsilon_o E)$; in tal caso l' unitá di misura di α é il metro cubo
Polarizzazione elettrica	P	V m^{-1}	-
- magnetica	J	T	-
Polo magnetico	p	Wb	-
Portata di massa	Q_m	kg s^{-1}	-
- - volume	Q_V	$m^3 s^{-1}$	-
- ponderale	Q_p	N s^{-1}	-
Potenziale magnetico	\mathcal{U}	A	-
- - vettore	A	Wb m^{-1}	-
Potere diottrico	D	m^{-1}	Detto anche diottria
- termoelettrico	P	V K^{-1}	-
Prevalenza	h	m	-
Pulsazione	ω	rad s^{-1}	-
Quantitá di luce	Q	lm s	-
- - moto	q	kg m s^{-1}	-
Reattanza acustica	x_a	N s m^{-5}	-
- - specifica	x_s	(kg $m^{-4} s^{-1}$) N s m^{-3} (kg $m^{-2} s^{-1}$)	-
- elettrica	X	Ω	-
- meccanica	x_m	N s m^{-1} (kg s^{-1})	-
Resilienza	r	N m^{-1}	-
Resistenza acustica	r_a	N S m^{-5} (kg $m^{-4} s^{-1}$)	-
- idraulica	r_i	sm^{-2}	-
- meccanica	r_m	N s m^{-1} (kg s^{-1})	-
- termica	r_t	K V^{-1}	-
Resistivitá acustica	ϱ_a	kg $m^{-3} s^{-1}$	-
- elettrica	ϱ	Ω m	-
- termica	ϱ_t	K m W^{-1}	-

Tabella 4-*Altre unità di grandezze derivate nel SI (CONTINUA)*

Grandezza	Simbolo	Unità	Note
Rigidità acustica	s_a	$N m^{-5}$ ($kg m^{-4} s^{-2}$)	-
- dielettrica	K_e	$V m^{-1}$	-
- di una molla	k	$N m^{-1}$	Detta anche costante elastica
- magnetica	K_m	$Wb m^{-1}$	-
Riluttanza magnetica	\mathcal{R}	H^{-1}	-
Sezione d'urto	σ	m^2	-
Sforzo di taglio	τ	$N m^{-2}$	-
- normale	σ	$N m^{-2}$	-
Spostamento dielettrico	D	$C m^{-2}$	-
Suscettanza elettrica	B	S	-
Tensione di vapore	p	$N m^{-2}$	-
- superficiale	τ	$N m^{-1}$	-
- tangenziale	τ	$N m^{-2}$	-
Trasmittanza termica	K	$W m^{-2} K^{-1}$	-
Velocità areolare	\dot{A}	$m^2 s^{-1}$	-
Vettore di Poynting	S	$W m^{-2}$	-
Volume specifico	ν	$m^3 kg^{-1}$	-