Microsistemi, Misure e Segnali 1

Note di

"Analisi armonica locale"

Appunti raccolti e redatti da Fabrizio Malacarne a.a. 2005-06

Nota: il presente materiale costituisce una bozza e, in quanto tale, può contenere errori ed omissioni.

1 Analisi locale delle proprietà armoniche di un segnale

Analizziamo in primo luogo la differenza che intercorre tra analisi puntuale e analisi globale. Nel caso dell'analisi puntuale, fissato un istante di tempo in cui si vuole determinare il valore del segnale che si vuole analizzare .

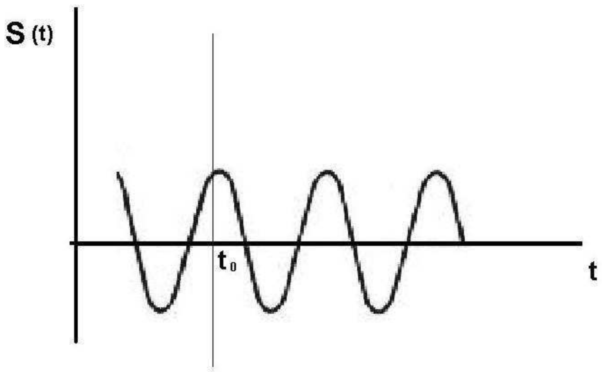

Figure 1: (a)Analisi puntuale

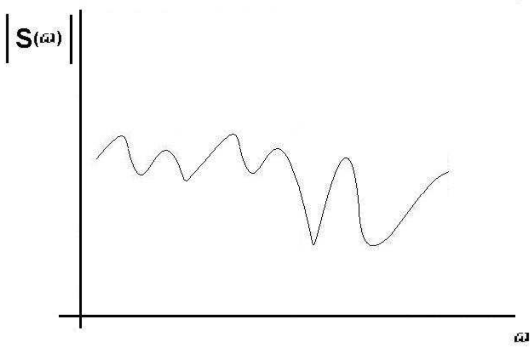

Figure 2: (b)Analisi globale nel dominio delle trasformate

Nel caso invece dell'analisi globale di Fourier per rappresentare ed analizzare correttamente il segnale si ha bisogno di tutto il segnale da $-\infty$ a $+\infty$. Questo caso non è sempre valido (ovviamente) in quanto per esempio con una sinusoide avrò una occupazione di banda limitata e per rappresentarla spettralmente mi basterà rappresentare una frequenza soltanto. Ma più in generale questa considerazione risulta valida.

L'analisi delle varie armoniche mostra la distribuzione di potenza rispetto alle diverse frequenze (o pulsazioni come in questo caso). La scelta di rappresentare nel dominio f oppure nel dominio ω è arbitraria. La sola differenza è un coefficiente moltiplicativo che avremo o meno nelle prossime trattazioni. Potremmo chiederci ora quali sono le caratteristiche frequenziali di una data porzione del segnale e come queste variano nel tempo. Ecco il perché nasce l'analisi locale che può essere considerata a tutti gli effetti una "via di mezzo" tra l'analisi in frequenza e l'analisi nel tempo. In termini armonici, analisi locale vuol dire compiere un'analisi tempo-frequenza. A questo riguardo può essere introdotto un opportuno diagramma detto **spettrogramma**. Al variare del tempo, lo spettro può cambiare (può per esempio cambiare la frequenza di picco).

Vediamo un esempio grafico...

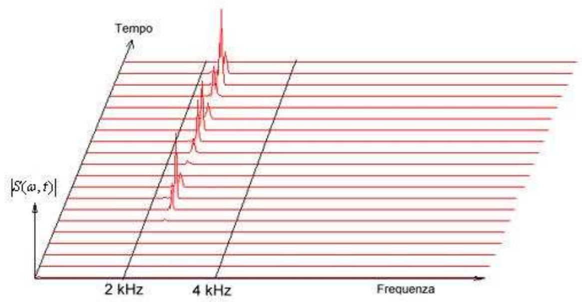

Figure 3: spettrogramma

In sostanza possiamo parlare di un'analisi armonica al variare del tempo. Come ovvio rispetto all'analisi di Fourier questa analisi è più ricca. Tipicamente lo spettrogramma è molto utile in molti campi di applicazione quali ad esempio l'analisi del parlato. Il segnali che possiamo caratterizzare su uno spettrogramma possono essere monodimensinali $s(t)$ (suoni); bidimensionali $s(x, y)$ (immagini); tridimensionali $s(x, y, t)$ (ad esempio sequenze di immagini). Prima di procedere con i metodi utilizzati per ricavare lo spettrogramma facciamo alcuni richiami che verranno utili.

2 Richiami di teoria dei segnali

La trasformata di Fourier di un segnale è esprimibile nel seguente modo:

$$s(t) \xrightarrow{F} \mathrm{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{s(t)}\ \mathrm{e}^{\text{- j}\omega\text{t}} dt$$

Mentre l'antitrasformata (trasformata inversa):

$$S(\omega) \overset{F^{-1}}{\rightarrow} \text{s(t)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \text{S}(\omega)\ \text{e}^{\text{j}\omega\text{t}} d\omega$$

Il segnale S(ω) $\in \mathbb{C}$, quindi vi sarà una parte reale ed una immaginaria. Un altro modo di esprimere è mediante rappresentazione polare:

modulo $\rightarrow$ |S(ω) |
fase $\rightarrow$ arg {S(ω)}

Nel caso in cui il segnale $s(t)$ è puramente reale, S(ω) sarà pari. Se il segnale $s(t)$ ha simmetria pari (ovvero $s(t) = s(-t)$), S(ω) sarà reale. Se invece il segnale $s(t)$ ha simmetria dispari (ovvero $s(t) = -s(t)$), S(ω) sarà immaginaria.
Osservazione:
Il segnale S(ω) può essere interpretato come prodotto scalare tra $s(t)$ ed $\text{e}^{\text{j}\bar{\omega}\text{t}}$. Il prodotto scalare tra due segnali evidenzia le similitudini tra essi risultando massimo quando i due segnali sono identici.

$$\omega = \bar{\omega}$$

$$\text{S}(\bar{\omega}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{s(t)}\ \text{e}^{\text{- j}\bar{\omega}\text{t}} dt$$

$$\text{e}^{\text{- j}\bar{\omega}\text{t}} = y^*(t)$$

Il prodotto scalare tra due segnali $x(t)$ ed $y(t)$ sarà dato da:

$$\lim_{t\to\infty} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)y^*(t)dt$$

L'asterisco sta ad indicare il segnale complesso coniugato ovvero:

$$z = a + ib \ \in \ \mathbb{C}$$

$$z^* = a - ib$$

Quando faccio il prodotto scalare se ho un riscontro (le similitudini di cui parlavamo prima) avrò un valore elevato mentre in assenza di riscontro avrò un valore basso.

Ecco ora alcune **proprietà della trasformata di Fourier** che ci verranno utili...

1) Sovrapposizione degli effetti $\alpha s_1(t) + \beta s_2(t) \xrightarrow{\mathbb{F}} \alpha S_1(\omega) + \beta S_2(\omega)$

2) Traslazione $s(t - t_0) \xrightarrow{\mathbb{F}}$ S(ω) e$^{\text{- j}\omega\text{t}_0}$

3) Scala $s(\alpha t) \xrightarrow{\mathbb{F}} \frac{1}{|\alpha|}\mathrm{S}\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$

4) Modulazione s(t) e$^{\text{- j}\omega_0\text{t}}$ $\xrightarrow{\mathbb{F}}$ $S(\omega - \omega_0)$

5) Convoluzione s(t) * h(t) $\xrightarrow{\mathbb{F}}$ S(ω)H(ω)

6) Prodotto $s(t) \cdot h(t) \xrightarrow{\mathbb{F}} \frac{1}{2\pi}S(\omega) * H(\omega)$

Dopo questo richiamo di teoria dei segnali ritorniamo allo spettrogramma...

3 Analisi locale tempo-frequenza (Time dependent frequency analysis)

Come accennato in precedenza abbiamo concettualmente vari modi di procedere.
Un primo modo è quello di introdurre il concetto di frequenza locale (dove per locale intendiamo rispetto ad una finestra mobile che "scorre" lungo il segnale).

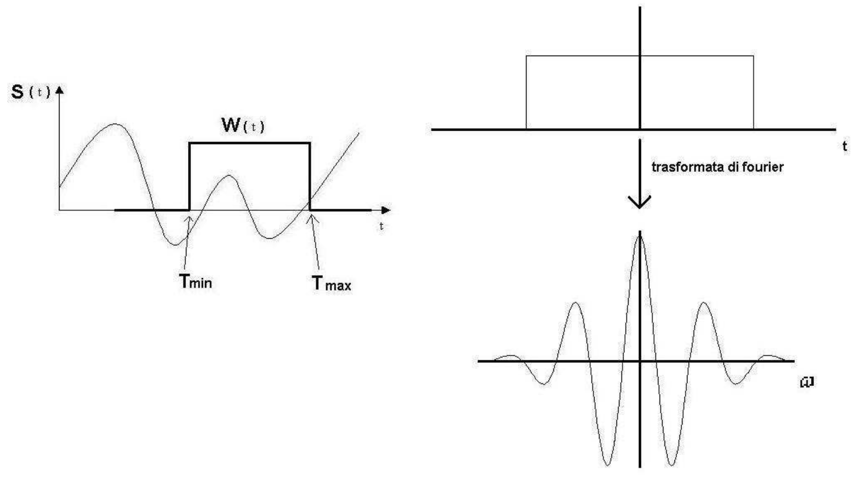

Figure 4: segnale finetsrato e trasformata di Fourier di una finestra

$$S_w(\omega,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{s}(\xi)\ \mathrm{w}(\xi-t)\ \mathrm{e}^{\text{- j}\omega\xi} d\xi$$

Quanto scritto può essere considerato come la trasformata di Fourier del prodotto dei due segnali

$$F\left\{\mathrm{s}(\xi)\ \mathrm{w}(\xi-t)\right\}\ \ =\ \mathrm{S}(\omega)\ *\ \left[\mathrm{w}(\omega)\ \mathrm{e}^{\text{- j}\omega\mathrm{t}}\right]$$

Quanto appena descritto è chiamato **TRASFORMATA DI FOURIER A FINESTRA** [WFT(window fourier transform), STFT(short time fourier transform)]. Se si decide di adottare questa metodologia sarà importante scegliere opportunamente la finestra; per esempio un coseno rialzato essendo una finestra più "dolce" (rispetto alla funzione rettangolare)causa meno danni quando andrò a trasformare in quazione non avrò la presenza delle code della sinc.

La seconda possibilità è quella di introdurre nuove funzioni base che non siano sin e cos. Queste funzioni base che andremo ad introdurre saranno modificate in modo che siano più "concentrate" nel tempo.

$$S_w(\omega,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{s}(\xi)\ \mathrm{w}(\xi-t)\ \mathrm{e}^{\text{- j}\omega(\xi-t)} d\xi$$

dove:

$$\mathrm{w}(\xi-t)\ \mathrm{e}^{\text{- j}\omega(\xi-t)} = h^*(\xi-t)$$

ATTENZIONE: la differenza è minima, ma sostanziale. Vi è una traslazione anche nel termine all'esponente complesso. Mentre nel primo caso si ha una situazione dove vi è un'origine qui, in questo secondo caso, viene traslata anche l'armonica. L'origine della armonica in questo caso non è ancorata nell'istante "zero" dei tempi bensì all'inizio della finestra.
Avremo quindi la seguente situazione:

Fissando $\omega = \omega_0$ ottengo:

Nel tempo: $S_w(\omega_0,t) = s_w(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{s}(\xi)\ \mathrm{h}^*_{\omega_0}(\xi-t)\ d\xi$

In frequenza: $F\left\{s_w(t)\right\} = \mathrm{S}(\omega)\cdot \mathrm{H}^*_{\omega_0}(\omega)$
TRASFORMATE WAVELET (ondina)

$$\mathrm{h}^*_{\omega_0}(t) = w(t)\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0\mathrm{t}}$$

dove: $\mathrm{h}^*_{\omega_0}(t)$ è una funzione base.

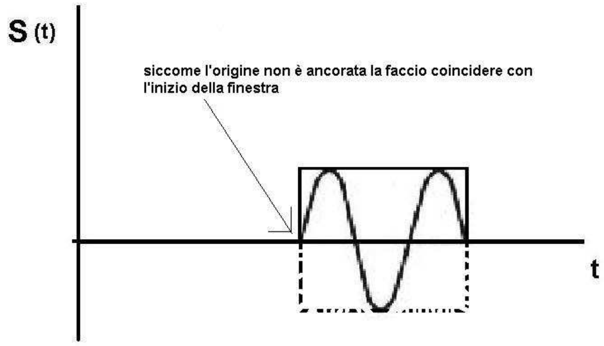

Figure 5: coincidenza tra inizio finestra ed inizio segnale

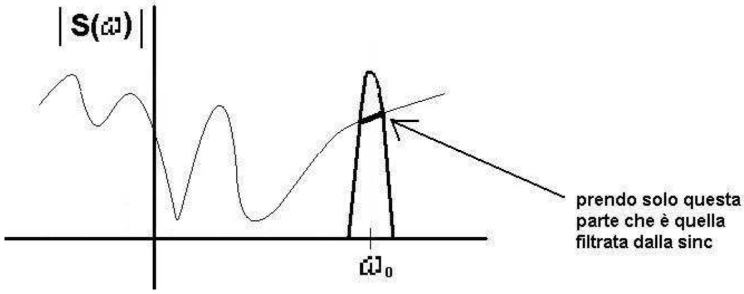

Figure 6: segnale filtrato dal sinc

In realtà vi sarebbero anche le code della sinc che operano il filtraggio, ma come sappiamo quasi tutta l'energia risiede nella parte centrale. Come detto in precedenza per eliminare le code andremo ad operare sulla finestra sostituendola per esempio con un coseno rialzato. In conclusione, si può dire che da un lato ho la possibilità di creare lo spettrogramma considerando tutte le frequenze ω ; ma scegliendo una ω fissata, allora il segnale sarà un segnale filtrato nel tempo. Il passaggio in frequenza mette in evidenza il fatto che vado a prendere non tutta la finestra, ma solo le porzioni di interesse.

4 Problema della dualità tempo frequenza

Per prima cosa richiamiamo il concetto che se un segnale ha una durata limitata nel tempo allora la sua occupazione in frequenza sarà infinita. Per ridurre l'estensione temporale di $s(t)$ possiamo introdurre un fattore di normalizzazione e garantire che l'energia del segnale $s(\alpha t)$ sia uguale a quella

del segnale $s(t)$.
Richiamiamo la proprietà della dualità che aiuta a spiegare questo concetto:

$$s(\alpha t) \stackrel{\mathbb{F}}{\rightarrow} \frac{1}{|\alpha|} \mathrm{S}\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$$

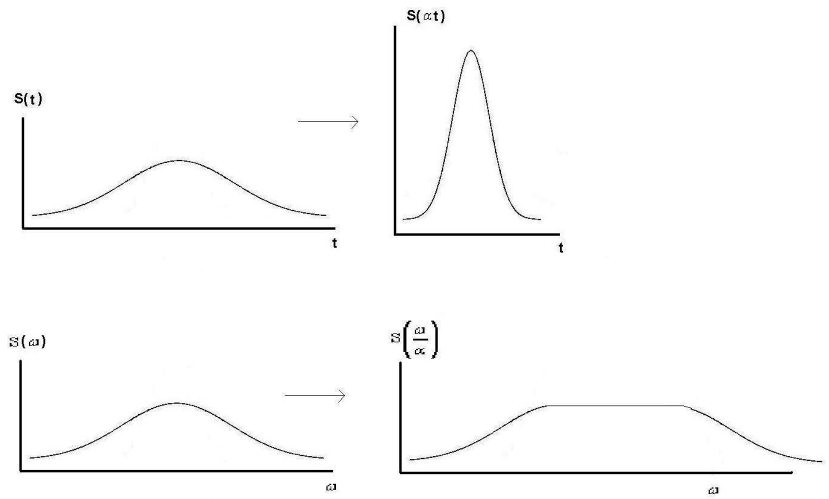

Figure 7: occupazione inversa tra tempo e frequenza

Come detto cambiando scala generalmente si assume che il segnale base mantenga la stessa energia (ovvero la stessa area). Ciò che guadagno nel tempo lo si perde nel dominio della frequenza. Operando alla normalizzazione dell'energia (nel tempo) si avrà:

$$E_t = \|s(t)\|^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt = 1$$

Da notare il fatto che abbiamo un modulo quadrato; questo perché $s(t)$ è supposto complesso

$$s_\alpha(t) = s(\alpha t)$$

$$\|s\alpha(t)\|^2 = 1 \text{ per ogni } \alpha$$

Passando al dominio delle frequenze avremo:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathrm{S}(\omega)|^2 \; d\omega$$

Le due espressioni (tempo e frequenze) sono legate tra loro attraverso il teorema di Parsefal:

$$\|s(t)\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |\mathrm{S}(\omega)|^2 \ d\omega$$

Infine possiamo dire:

$$s_\alpha(t) = s(\alpha t) \ \rightarrow \ \mathrm{S}_\alpha(\omega) = \sqrt{\alpha} \ S(\alpha\omega)$$

5 Principio di indeterminazione (Heisenberg)

Il limite quantistico (Heinsenberg) è detto anche limite di indeterminazione.Verso la fine degli anni 40 il fisico Dennis Gabor ha dimostrato un equivalente principio di indeterminazione però applicato alla teoria dei segnali. Per formalizzare adeguatamente questo principio costruiamo un diagramma detto diagramma di rappresentazione dell'informazione. Questo diagramma permette di descrivere il segnale in maniera congiunta tempo-frequenza.

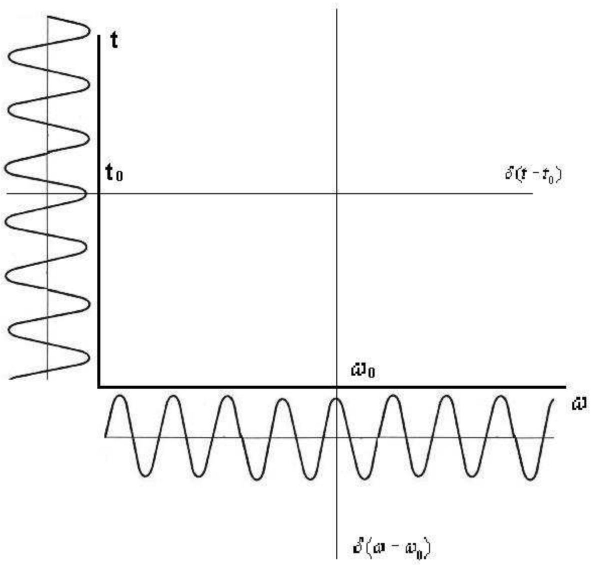

Figure 8: localizzazione tempo frequenza

In sostanza esso permette di localizzare una delle due grandezze in maniera "precisa". Questo è lo stesso problema che si poteva riscontrare nell'analisi di Fourier. Vediamo ora una rappresentazione più realistica dove considero entrambi i segnali di durata finita. Per quanto riguarda il segnale in frequenza per considerarlo di durata finita opero un'approssimazione; sapendo che la maggior parte dell'energia del segnale risiede nella parte centrale della sinc.

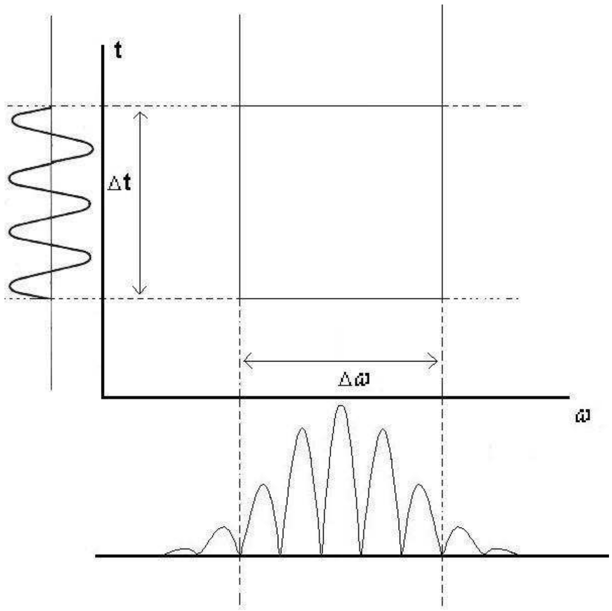

Figure 9: rettangolo di Heinsenberg

Il prodotto tra Δt e $\Delta\omega$ rappresenta l'informazione. Ciò che mi interessa è avere la massima localizzazione sia per t che per ω . Ma come detto prima, per un dato segnale, una migliore localizzazione rispetto ad un dominio si può avere solo al prezzo di peggiorare quella nell'altro dominio. Infatti migliorando la localizzazione temporale peggioro quella in frequenza e viceversa. Detto in altri termini può cambiare la forma ma non l'area del rettangolo di localizzazione.

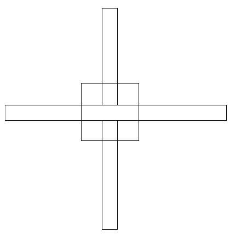

Figure 10: aree uguali, cambia la forma ma non l'area

Quindi quello che si fa è agire direttamente sul segnale per avere l'area la più piccola possibile e quindi diminuire l'indeterminazione di uno dei due casi. Esiste tuttavia un limite che non può essere ridotto ed è:

$$\Delta t \Delta \omega \geqslant \frac{1}{2}$$

Il corrispettivo in meccanica quantistica è:

$$\Delta x \Delta p \geqslant \frac{h}{2\pi}$$

dove:

Δx è la posizione

Δp il momento

h la costante di Plank

6 Misura dell'incertezza

$\Delta t \Delta \omega \geqslant \frac{1}{2}$ è un risultato generale, quindi possiamo introdurre relazioni generali per valutare Δt e $\Delta \omega$. Avendo un segnale $s(t)$ ad energia (area) unitaria ovvero $\|s(t)\| = 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathrm{s(t)}|^2 dt$ si potrebbe pensare di interpretare $|\mathrm{s(t)}|^2$ come una funzione densità di probabilità. Così facendo si potrebbe associare ad essa un valor medio ed una varianza.

$$\text{Valor medio: } \bar{t} \ = \int t\, |s(t)|^2 dt$$

$$\text{Varianza: } \sigma_t^2 \ = \int (t - \bar{t})^2 \ \ |s(t)|^2 dt$$

Poiché anche $\|S(\omega)\| = 1$ ha una definizione analoga in quanto costruita appositamente normalizzata, in modo duale può essere considerata una funzione densità di probabilità. Quindi:

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega\, |\mathrm{S}(\omega)|^2 d\omega$$

$$\sigma_\omega^2 = \frac{1}{2\pi} \int (\omega - \bar{\omega})^2 \ \ |S(\omega)|^2 d\omega$$

In sostanza quindi avremo che σ_t è associato a Δt e σ_ω è associato a $\Delta\omega$. Senza addentrarci troppo nei particolari possiamo dire che questa è proprio la strada intrapresa da Gabor per stabilire il limite di $\frac{1}{2}$. Dire che si ha una incertezza sulla localizzazione può essere pensato come ad un problema di risoluzione. Se si ha un'incertezza di $\Delta\omega$ non è risolvibile in quanto si avrebbe ambiguità fra le due ω (precedente e successiva).

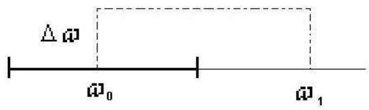

Figure 11: massima incertezza

Infine si può dire che se non avessi segnali normalizzati non vi è alcun problema in quanto la normalizzazione può essere fatta durante il calcolo della varianza.

$$\sigma_t^2 = \frac{\int (t-\bar{t})^2 \ \ |s(t)|^2 dt}{\int |s(t)|^2 dt}$$

Il rettangolo di Heinsberg rappresenta l'informazione associata al nostro segnale. Viene anche chiamato ***Logon***. Come già visto in precedenza esso rispetta il seguente limite $\Delta t \Delta\omega \geqslant \frac{1}{2}$.
In questo caso $\frac{1}{2}$ rappresenta la massima localizazione ovvero l'incertezza minima che posso associare ad una misura congiunta tempo-frequenza di un segnale.
Le funzioni elementari che mi permettono di tassellare il piano tempoi frequenza sono dette ***Time-Frequency Atoms***. Tra queste la funzione di Gabor permette di raggiungere la massima localizzazione congiunta imposta dal limite di Heisehnberg. Di fatto possiamo considerare la funzione di Gabor semplicemente come una Gaussiana modulata in frequenza:

$$g(t) = \text{cost} \cdot \ e^{\frac{-(t-t_0)^2}{2\sigma^2}} e^{j\omega_0 t}$$

dove:

$e^{\frac{-(t-t_0)^2}{2\sigma^2}}$ è la finestra Gaussiana. In realtà non è una finestra vera e propria in quanto ha estensione infinita, ma tendendo asintoticamente a zero la si considera tale.

$e^{j\omega_0 t}$ è il termine modulante che in sostanza sposta la Gaussiana dalla banda base alla frequenza ω_0

Passando nel dominio delle frequenze operiamo la trasformata di Fourier alla funzione di Gabor $g(t)$:

$$G(\omega) = \mathbb{F}\left\{g(t)\right\} = \text{cost'} \cdot \ e^{\frac{-\omega^2\sigma^2}{2}} * \delta(\omega - \omega_0) = \text{cost'} \cdot \ e^{\frac{-(\omega-\omega_0)^2}{2}\sigma^2}$$

In merito a ciò vanno fatte due osservazioni: la prima riguarda la costante cost' che per continuare ad avere funzioni normalizzate rispetto alla loro energia cost' $\neq$ cost . La seconda è che la trasformata di Fourier di una Gaussiana resta ancora una Gaussiana se pur con valori diversi dei parametri che la caratterizzano. La differenza tra le due Gaussiane è che in un caso il termine σ^2 compare al denominatore mentre nell'altro caso compare al numeratore. In altre parole la sezione della campana nel dominio del tempo è inversamente proporzionale a qeulla nel dominio delle frequenze.

Vediamone una rappresentazione grafica:

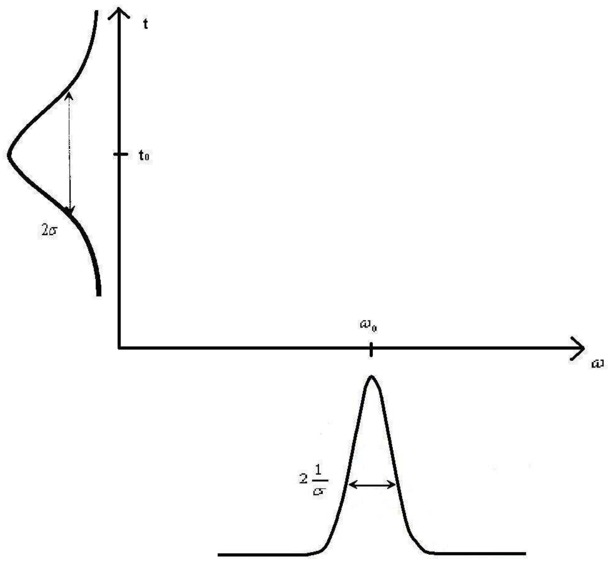

Figure 12: Localizzazione congiunta di una funzione di Gabor nel dominio tempo-frequenza

Facciamo ora qualche breve cenno sulle costanti cost e cost' ; esse sono scelte in modo che la funzione di Gabor sia normalizzata in termini energetici. Avremo perciò $\|g(t)\|^2 = 1$ ed $\|G(\omega)\|^2 = 1$. Riportiamo per completezza i valori che assumono le due costanti:
cost $= (\sigma\sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}}$
cost' $= (2\sigma\sqrt{\pi})^{\frac{1}{2}}$
In questo modo ricaviamo un insieme di funzioni elementari ad energia unitaria e quindi confrontabili.

7 Osservazione preliminare alle trasformate lineari tempo-frequenza

La funzione di Gabor permette di effettuare una trasformata di Fourier a finestra. In alternativa possiamo utilizzare la funzione di Gabor $g(t)$ in esmpressioni "tipo wavelet".

Trasformata di Fourier finestrata
Come già detto in precedenza questa funzione non sarà ancorata agli assi, ma la sua origine coinciderà con l'origine della finestra di lavoro.

Trasformata Wavelet

$$S_W(\omega,t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} s(\xi)\; w(\xi-t)\, e^{-j\omega(\xi-t)}d\xi$$

La funzione w della trasformata wavelet risulta essere una Gaussiana.

Per $\omega=\omega_0$ e t = t_0 si avrà:

$$s_W(t_0,\omega_0)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} s(t)\;\mathrm{h}^*_{t_0,\omega_0}(t)\,dt$$

dove:

$h_{t_0,\omega_0}(t)=w(t-t_0)\,e^{j\omega_0(t-t_0)}$

$s_W(t_0,\omega_0)$ rappresenta il valore associato al rettangolo di Heinsenberg centrato in t_0,ω_0 .

ATTENZIONE: nell'espressione $s_W(t_0,\omega_0)$ perché troviamo s minuscolo? Semplicemente perché fissando $\omega=\omega_0$ quando ritorno nel tempo $S_W(\omega_0,t_0)\rightarrow s_W(t,\omega_0)$ non varia con ω_0 che è fissato e viene lasciato per sola indicazione. Posso ottenere lo stesso valore anche se vado a considerare $H(\omega)$.

$$H(\omega)=\mathbb{F}\{h(t)\}$$

$$s_W(t_0,\omega_0)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} S(\omega)\;H^*(\omega)\;\;d\omega$$

Notiamo che il prodotto scalare resta invariante al passaggio tempo-frequenza. Il termine moltiplicativo $\frac{1}{2\pi}$ è ereditato dalla scelta di lavorare in ω anziché in f. Ricordiamo che $s_W(t_0,\omega_0)$ indica quanta energia c'è nel segnale in termini congiunti del segnale di Gabor.

8 Trasformate lineari Tempo-Frequenza

Consideriamo una famiglia di funzioni base ("atomi tempo-frequenza") $\{\varphi_\gamma\}$ dove γ è un multi-indice e poniamo che l'energia sia unitaria ovvero che $\|\varphi_\gamma\|^2=1$. La corrispondente trasformata di un segnale $s(t)$ dato risulterà essere:

$$S_\varphi(\gamma)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} s(t)\;\varphi^*_\gamma(t)\,dt=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} S(\omega)\;\Phi^*_\gamma(\omega)\;\;d\omega$$

A seconda di come verranno scelte le funzioni base avremo diverse trasformate tempo-frequenza, vediamo alcuni esempi:

1) Trasformate di Fourier a finestra

Si ottiene ponendo

$$\varphi_\gamma(t) = h_{t_0,\omega_0}(t) = w(t - t_0)e^{j\omega_0 t}$$

corrispondente ad una finestra traslata e modulata con frequenza ω_0 .

VEDI FOGLI ALLEGATI **MALLAT**

2) Trasformata Wavelet

Si ottiene scegliendo funzioni base costruite per dilatazione (α) e traslazioni (t_0) di una stessa funzione chiamata wavelet madre (mother wavelet).

$$\varphi_\gamma(t) = \psi_{\alpha,t_0}(t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\psi\left(\frac{t - t_0}{\alpha}\right)$$

La trasformata di Gabor rappresenta una buona approssimazione di una trasformata wavelet.

9 Funzione di Gabor

Esaminiamo ora, in modo più approfondito, la funzione di Gabor vera e propria:

$$\varphi_\gamma(t) = g_{t_0,\omega_0}(t) = Gauss\,(t - t_0)\,e^{j\omega_0(t-t_0)}$$

La funzione di Gabor è una funzione complessa costituita da una Gaussiana che viene moltiplicata per un esponenziale complesso. Vi saranno inoltre termini moltiplicativi di normalizzazione di cui si è già discusso:

$$g\,(t) = \frac{1}{(\sigma\sqrt{\pi})^{\frac{1}{2}}}e^{\frac{-(t-t_0)^2}{2\sigma^2}}\,e^{j\omega_0(t-t_0)}$$

Si osserva che il termine $e^{j\omega_0(t-t_0)}$ potrebbe essere scritto come una fase ovvero come $e^{j(\omega t+\emptyset)}$. Siccome $g(t)$ è una funzione complessa, essa potrà essere scomposta in parte reale e parte immaginaria.

$$\Re\left\{g\left(t\right)\right\} = Gauss\left(t-t_0\right)\cos\omega_0\left(t-t_0\right)$$

$$\Im\left\{g\left(t\right)\right\} = Gauss\left(t-t_0\right)\sin\omega_0\left(t-t_0\right)$$

Graficamente:

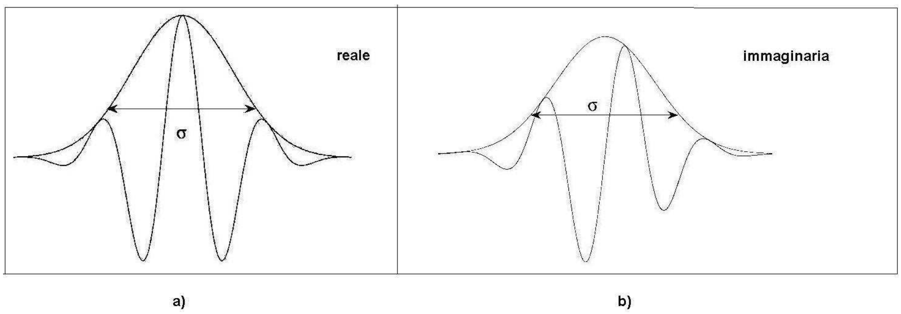

Figure 13: Parte reale (a) e parte immaginaria (b) di una funzione di Gabor

Nel dominio delle frequenze avremo invece:

$$G\left(\omega\right) = \left(2\sigma\sqrt{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\left(\omega-\omega_0\right)}{2}} e^{j\omega t_0}$$

Graficamente:

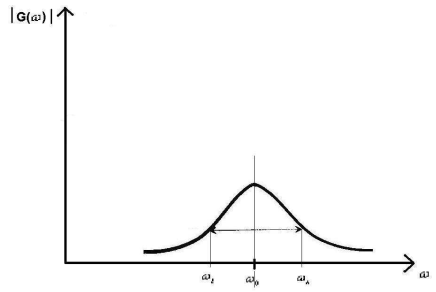

Figure 14: Rappresentazione in frequenza di una funzione di Gabor con frequenza di picco ω_0

Qualora decidessimo di esprimere (analogamente a quanto visto prima) $e^{j\omega t_0}$ come $e^{j(t_0\omega+\Phi')}$ avremmo il notevole vantaggio che così facendo si ottiene la dualità tempo-frequenza. **Osservazione:**La funzione di Gabor è un compromesso tra le due situazioni "estreme" ovvero la massima localizzazione nel tempo ed infinita estensione in frequenza e viceversa. La rappresentazione del segnale tramite le funzioni di Gabor è un compromesso tra la rappresentazione nel tempo e la rappresentazione di Fourier. Il parametro σ controlla il compromesso tra le due:

se $\sigma \to 0$ $g(t) \to \delta(t - t_0)$ ed in
tal caso avremo una rappresentazione nel dominio del tempo.

10 Caratterizzazione in frequenza della funzione di Gabor

Un qualunque filtro passa-banda può essere caratterizzato sulla base di tre parametri. Il primo è il fattore di guadagno o di attenuazione che il filtro fornisce, il secondo è la frequenza di picco ω_0 , ed il terzo è la larghezza di banda. Questo terzo parametro può essere definito in termini **assoluti** o **relativi**

BANDA ASSOLUTA

$$\Delta\omega = \omega_h - \omega_l = \text{banda assoluta}$$

Facciamo ora una brevissima parentesi sui possibili livelli di attenuazione utilizzati:

1) semi-ampiezza

$$|G(\omega)| = \frac{1}{2}|G(\omega_0)| = \frac{2\sqrt{2\ln 2}}{\sigma}$$

2) half-power

$$|G(\omega)|^2 = \frac{1}{2}|G(\omega_0)|^2 = \frac{2\sqrt{\ln 2}}{\sigma} \quad [\text{ - 3dB}]$$

3) deviazione standard

$$\Delta\omega = \frac{2}{\sigma}$$

Per semplicità, nella nostra trattazione decidiamo di portare avanti la terza ipotesi dove non compare il termine logaritmico sotto radice.

BANDA RELATIVA

$$B_{rel} \triangleq \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\omega_h}{\omega_0} - \frac{\omega_l}{\omega_0}$$

Una definizione alternativa in base logaritmica

$$\omega \rightarrow \log_2 \omega$$

Utilizzo le "ottave" per rappresentare le frequenze, pertanto:

$$\text{Banda relativa in ottave} = \beta = \log_2 \frac{\omega_h}{\omega_0} - \log_2 \frac{\omega_l}{\omega_0} = \log_2 \frac{\omega_h}{\omega_l}$$

Sfruttando la simmetria della funzione di Gabor in frequenza avremo:

$$\omega_h = \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}$$

$$\omega_l = \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}$$

Quindi da questa relazione posso trovare un legame tra β e la banda relativa; vediamo come:

$$\beta = \log_2 \frac{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}}{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}} \leftrightarrow \omega_0 = \frac{\Delta\omega}{2} \left(\frac{2^\beta + 1}{2^\beta - 1} \right)$$

Nella pratica si considera con $\beta \in [0.8\ ,\ 1.2]$

11 Rappresentazione a banda relativa costante

Questa rappresentazione richiede di riconsiderare il piano tempo-frequenza. Prendiamo in esame per esempio la prima colonna. Avremo filtri con la stessa frequenza di picco ma centrati in diversi istanti temporali.

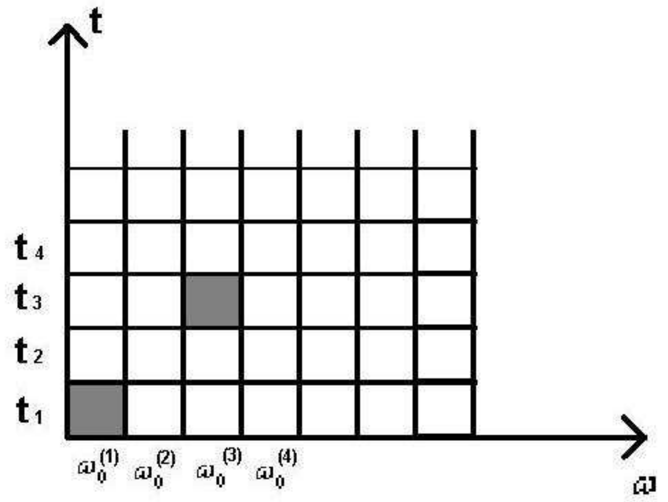

Figure 15: Tassellazione del piano tempo-frequenza nell'ipotesi di rappresentazione a banda assoluta costante

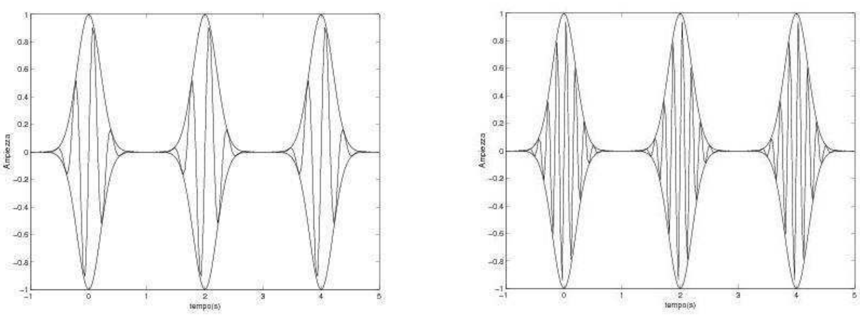

Figure 16: Analisi degli inviluppi

Come vediamo non cambia l'inviluppo!! Se prendessi in esame una colonna con ω più elevate (per esempio la terza colonna) avrò anche in questo caso gli stessi inviluppi, ma questa volta la pulsazione è più alta. Quindi in sostanza i due filtri si mantengono costanti nell'inviluppo, ma non nella pulsazione. Questa rappresentazione mantiene costante la banda assoluta (rappresentazione banda assoluta costante). Cambiando la pulsazione, nasce il problema in quanto all'interno della stessa "finestra" temporale avrò più oscillazioni e di conseguenza viene a cambiare la forma d'onda utilizzata. Quindi se considero banda assoluta costante utilizzo forme d'onda non simili a se stesse cambiando la frequenza di picco. Proprio per avere forme d'onda uguali introduco la rappresentazione a banda relativa costante. Opero quindi una tassellazione differente rispetto alla precedente.

Mano a mano che procedo dimezzo l'altezza e raddoppio la base.

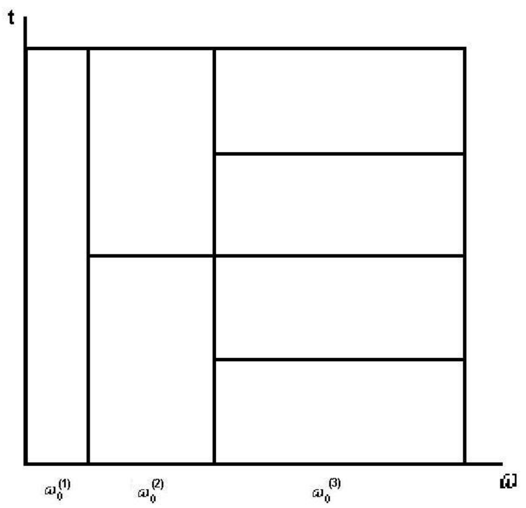

Figure 17: Tassellazione del piano tempo-frequenza nell'ipotesi di rappresentazione a banda relativa costante

$$\Delta\omega^{(2)} = 2\Delta\omega^{(1)}$$

$$\omega_0^{(2)} = 2\omega_0^{(1)}$$

$$\frac{\Delta\omega^{(i)}}{\omega_0^{(i)}} = \text{costante}$$

$$Essendo: \ \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{2}{\sigma}$$

$$\beta = \log_2 \frac{\sigma\omega_0 + 1}{\sigma\omega_0 - 1} \ \rightarrow \ 2^\beta = \frac{\sigma\omega_0 + 1}{\sigma\omega_0 - 1}$$

$$2^\beta\sigma\omega_0 - 2^\beta = \ 2^\beta + 1$$

$$\sigma\left(2^\beta - 1\right)\omega_0 = 2^\beta + 1$$

$$\sigma = \frac{2^\beta + 1}{2^\beta - 1}\ \frac{1}{\omega_0}$$

Ora possiamo dire che qualora si volesse avere banda relativa costante σ e ω_0 non saranno più parametri liberi bensì verranno posti come vincoli. Facciamo ora una considerazione sul range delle frequenze.

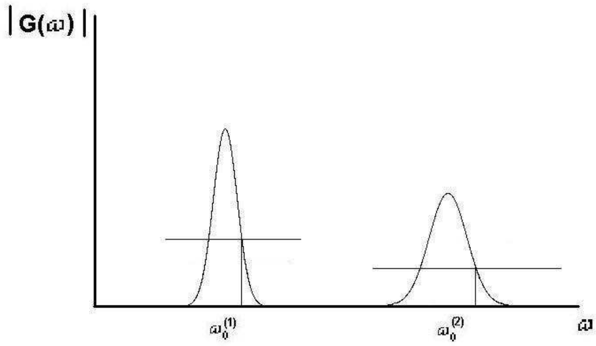

Figure 18: Rappresentazione in frequenza della funzione di Gabor con tagli posti (per fissare le idee) al 50 %

È possibile decidere di far si che la frequenza di taglio superiore del primo coincida con la frequenza di taglio inferiore del secondo. Così facendo si ha una copertura completa su tutto il range delle ω . Detto in altri termini è come se andassimo ad imporre come vincolo:

$$\omega_h^{(n)} = \omega_l^{(n+1)}$$

da cui...

$$\omega_0^{(n)} + \frac{\Delta\omega^{(n)}}{2} = \omega_0^{(n+1)} - \frac{\Delta\omega^{(n+1)}}{2}$$

Ora mettiamo a sistema questa relazione con quella vista in precedenza

$$\omega_0 = \frac{\Delta\omega}{2}\left(\frac{2^\beta + 1}{2^\beta - 1}\right)$$

dove esprimerò $\Delta\omega$ in funzione di ω_0 .

Sostituendo...

$$\omega_0^{(n)} + \frac{1}{2} \cdot 2\omega_0^n \left(\frac{2^\beta - 1}{2^\beta + 1}\right) = \omega_0^{(n+1)} - \frac{1}{2} \cdot 2\omega_0^{(n+1)} \left(\frac{2^\beta - 1}{2^\beta + 1}\right)$$

$$\omega_0^{(n)} \left(\frac{2^\beta + 1 + 2^\beta - 1}{2^\beta + 1}\right) = \omega_0^{(n+1)} \left(\frac{2^\beta + 1 - 2^\beta + 1}{2^\beta + 1}\right)$$

$$2\omega_0^{(n)}2^{\beta} = 2\omega_0^{(n+1)} \;\rightarrow\; \omega_0^{(n+1)} = 2^{\beta}\omega_0^{(n)}$$

Come si può facilmente osservare vi è una dipendenza diretta da 2^{β} . Questo significa che per far si che le due frequenze coincidano (e coprire così l'intero range delle frequenze) basterà operare opportunamente sul termine β . Ma noi sappiamo che scegliere β è come scegliere $\Delta\omega$ (questo perché con β fissato, ω_0 lo ricavo, resta soltanto $\Delta\omega$). Otterremo questa situazione:

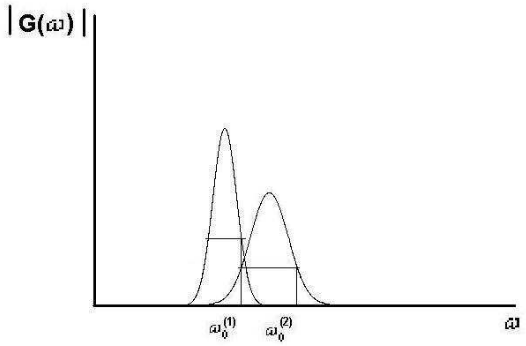

Figure 19: Rappresentazione della situazione in cui si ha la copertura dell'intero range di frequenza in quanto la frequenza di taglio superiore del primo coincide con la frequenza di taglio inferiore del secondo (a livello di ascissa)

Rimane solo il problema di avere tangenza tra i due "segmenti di attenuazione". Per far che questo accada ovviamente basterà operare opportunamente sul livello di attenuazione. Qualora questo non venisse fatto non si avrà tangenza perfetta; ma la cosa è di scarsa rilevanza; il fattore importante è che si abbia la stessa ascissa cosicché tutte le ω siano coperte.

$$\text{Se } \beta = 1 \;\Rightarrow\; \omega_0^{(n+1)} = 2\omega_0^{(n)}$$

$$\Delta\omega = 2\omega_0\left(\frac{1}{3}\right) \;\Rightarrow\; \Delta\omega = \frac{2}{3}\omega_0$$

$$\sigma = \frac{1}{\omega_0}\left(\frac{3}{1}\right) = \frac{3}{\omega_0}$$

12 Analisi armonica locale

Quello che si ricerca sono informazioni locali sul segnale in termini di ampiezza (modulo) e fase.
Esprimiamo il segnale come parte reale e parte immaginaria:

$$g(t) = \Re\{g(t)\} + j\Im\{g(t)\}$$

Ciò che ricerchiamo come detto sono modulo e fase. Questo ci ricorda l'analisi di Fourier dove i parametri sono globali e valgono su tutto il segnale. In questo caso vogliamo avere parametri locali limitati alla solo finestra presa in considerazione.

Ampiezza $= A(t) = \sqrt{(s * \Re\{g(t)\})^2 + (s * \Im\{g(t)\})^2}$

Fase $= \Phi(t) = arctan \frac{s*\Im\{g(t)\}}{s*\Re\{g(t)\}}$

Questi valori sono ottenuti per $\omega = \omega_0$ che caratterizza il filtro in uso.

13 Frequenza Istantanea

Si vuole determinare all'interno di una porzione di segnale (ovvero come nel nostro caso all'interno di una finestra) quale sia la frequenza dominante. Supponiamo per ipotesi di analizzare un segnale sinusoidale :

$$s(t) = A\cos(\omega_0 t + \emptyset)$$

dove: $\emptyset(t) = \omega_0 t + \emptyset$

Come sappiamo volendo calcolare la frequenza di una sinusoide avrò una sola armonica perciò frequenza istantanea e frequenza assoluta coincideranno in quanto vi è una sola frequenza presente (ω_0).

$$\frac{d\emptyset(t)}{dt} = \omega_0$$

Nel caso in cui il segnale sia più complesso di una semplice armonica (segnale di fase non lineare come nella maggior parte dei casi) la formula applicata non cambia e permette di ricavare la frequenza istantanea:

$$\omega_{ist} = \frac{d\emptyset(t)}{dt}$$

14 Analisi di segnali 2D (spaziali)

Come per i segnali monodimensionali anche i segnali bidimensionali hanno il problema dell'incertezza sia nello spazio che in frequenza. Il segnale che andremo a prendere in considerazione non è più $s(x)$ bensì $s(x, y)$.

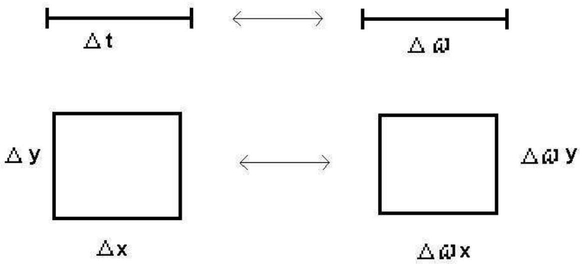

Figure 20: Rappresentazione schematica del problema di localizzazione congiunta di un segnale nel tempo e nelle frequenze

Nel caso monodimensionale si ha:

$$t \xrightarrow{F} \omega$$

mentre nel caso bidimensionale si ha:

$$(x, y) \xrightarrow{\mathbb{F}} (k_x, k_y) = \vec{k}$$

È importante notare che analizzando un segnale in una certa porzione di spazio il prodotto $\Delta x \Delta y \Delta k_x \Delta k_y$ resta costante. In analogia con quanto visto per i segnali nel tempo possiamo definire le "incertezze":

$$\sigma_{\mathrm{x}}^2 = \frac{\iint (x-\bar{x})^2 \quad |\mathrm{s(x,y)}|^2 \, dxdy}{\iint \quad |\mathrm{s(x,y)}|^2 \, dxdy} \quad \rightarrow \quad \Delta x$$

dove il termine al denominatore $\iint \quad |\mathrm{s(x,y)}|^2 \, dxdy$ è il termine di normalizzazione

$$\sigma_{\mathrm{y}}^2 = \frac{\iint (y-\bar{y})^2 \quad |\mathrm{s(x,y)}|^2 \, dxdy}{\iint \quad |\mathrm{s(x,y)}|^2 \, dxdy} \quad \rightarrow \quad \Delta y$$

Nella localizzazione in due dimensioni la finestra può assumere ogni tipo di orientazione. In sostanza viene a mancare un legame tra i due assi.

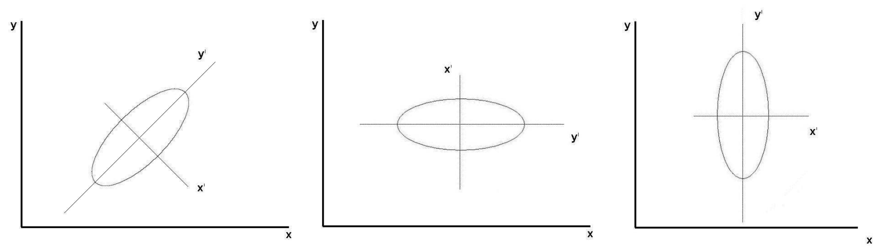

Figure 21: Finestre ellittiche con diversa orientazione

Ciò che cerchiamo è quindi un qualcosa che abbia la funzione di rappresentare l'assimetria. Per far questo considero la figura come una densità di probabilità potrò scrivere:

$$\mu_{xy}^2 = \frac{\iint (x - \bar{x})(y - \bar{y}) \ \ |\mathrm{s(x,y)}|^2 \, dxdy}{\iint \ \ |\mathrm{s(x,y)}|^2 \, dxdy}$$

Il problema viene affrontato nel seguente modo: ci si mette in una situazione dove non è presente il termine μ_{xy}^2 e poi l'orientamento viene trattato a parte. Questo può essere fatto in quanto l'incertezza è associata alla sola area della figura e non all'orientamento assi. Ciò che risulta importante è che il prodotto delle incertezze resti uguale. Come nel caso monodimensionale anche nel caso bidimensionale è presente un limite:

$$\Delta x \Delta k_x \geqslant \frac{1}{2}$$

$$\Delta y \Delta k_y \geqslant \frac{1}{2}$$

$$\Delta x \Delta y \Delta k_x \Delta k_y \geqslant \frac{1}{4}$$

Principio di indeterminazione di Heinsenberg che nel caso bidimensionale è stato verificato da John Dongman, 1985. Anche in questo caso si può dimostrare che la funzione di Gabor è la funzione dalla quale si ottiene la massima localizzazione.
In altre parole, anche la funzione di Gabor bidimensionale $g(x, y)$ raggiunge il minimo valore di incertezza.

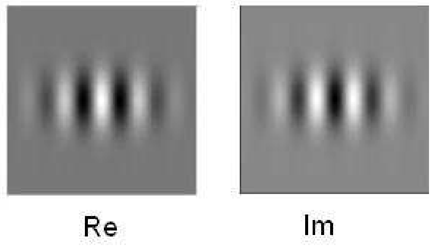

Figure 22: Funzione di Gabor (reale ed immaginaria)

$$g(x,y) = \frac{1}{\sqrt{\sigma_x \sigma_y \pi}} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-x_0)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-y_0)^2}{\sigma_y^2}\right]} e^{jk_0 x}$$

dove:

$\frac{1}{\sqrt{\sigma_x \sigma_y \pi}}$ è il termine di normalizzazione energetico.

$e^{jk_0 x}$ è il termine dell'onda. Siccome l'onda si ha soltanto lungo l'asse x ciò che andrò a considerare è soltanto σ_x . Andremo perciò a trovare un legame tra σ_x e Δk .

$$G(k_x, k_y) = \text{cost} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left[k_x^2 \sigma_x^2 + k_y^2 \sigma_y^2\right]} * \delta(k_x - k_y)$$

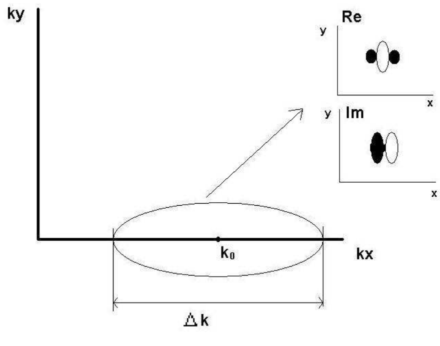

Figure 23: Rappresentazione di un filtro passa-banda

dove: Δk è la banda assoluta e k_0 è la frequenza di picco.

$\Delta k = \frac{2}{\sigma_x}$ come detto σ_x influenza la banda.

$$\beta = \log_2 \frac{\sigma_x k_0 + 1}{\sigma_x k_0 - 1}$$

$$Se\ \beta = 1 \ \Rightarrow \ \Delta k = \frac{2}{3}k_0 \text{ come nel caso monodimensionale}$$

$$\sigma_x = \frac{1}{k_0}\left(\frac{2^\beta + 1}{2^\beta - 1}\right)$$

Vediamo ora coma faccio ad aggiungere l'informazione sull'orientamento del filtro. Supponiamo di avere una situazione come in figura qui sotto.

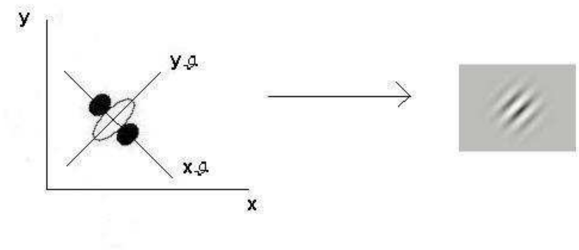

Figure 24: Funzione di Gabor con orientazione di 45°

Detto con parole semplici la funzione $g(x, y)$ dovrebbe diventare $g_\theta(x, y)$ ovvero esprimere una dipendenza rispetto all'orientamento appunto. Ciò che faccio è semplicemente applicare le formule di roto-traslazione di modo che il filtro venga ruotato.

formule di roto-traslazione: $\begin{cases} x_0 = (x - x_0)\cos\left(\vartheta - \frac{\pi}{2}\right) + (y - y_0)\sin\left(\vartheta - \frac{\pi}{2}\right) \\ y_0 = (x - x_0)\sin\left(\vartheta - \frac{\pi}{2}\right) + (y - y_0)\cos\left(\vartheta - \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$

ciò che si ottiene è:

$$g_\theta(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\sigma_x \sigma_y \pi}} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x_0)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y_0)^2}{\sigma_y^2}\right]} \cos(k_0 x_\theta)$$

Ora k_0 è la frequenza di picco radiale fissata per ogni orientamento.

Avendo un certo numero di questi filtri in frequenza otterrei una situazione come in figura qui sotto.

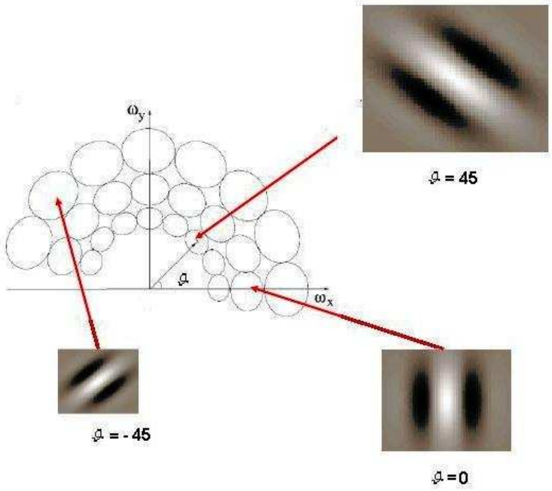

Figure 25: filtri di Gabor orientati

Infine un breve accenno a come si comporta il filtro di Gabor quando viene inserita anche la variabile tempo. Il segnale considerato sarà s(x,y,t), ma per semplicità consideriamo una sola dimensione quindi avremo come segnale da considerare s(x,t). Detto in parole semplici e senza addentrarci troppo nei dettagli diciamo semplicemente che facendo variare tutti i parametri anziché avere il fiore (dove ogni petalo rappresenta un filtro di Gabor) visto in precedenza avrei sfere con bucce concentriche che vanno a riempire mano a mano l'intero volume.