

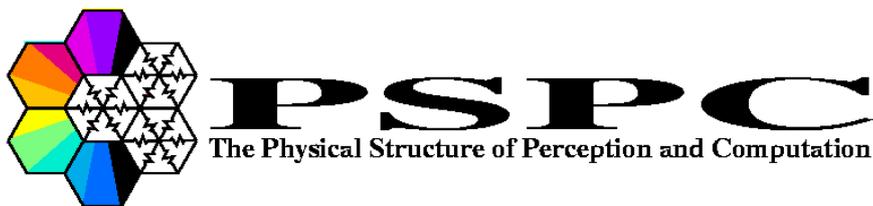
Dipartimento di Ingegneria Biofisica ed Elettronica
Università degli Studi di Genova
PSPC-Research Group

Insegnamento di
MISURE ELETTRONICHE modulo 1

Appunti alle lezioni

(©PSPC-Lab 2000, i diritti d'autore sono riservati)

Docente: Prof. Giacomo Mario Bisio
Data: 20-01-2000
Versione: 1.0
Note: Le sezioni individuate da * sono da considerarsi non necessarie alla preparazione dell'esame di DU, quelle con ** alla preparazione dell'esame (laurea e DU)



Indice

I	Strumenti per la misura di grandezze elettriche	9
1	Strumenti elettromeccanici	11
1.1	Amperometro a bobina mobile	11
1.2	Voltmetro DC a bobina mobile	18
1.3	Multimetro analogico	22
1.3.1	Schema serie	23
1.3.2	Schema parallelo **	24
1.4	Misure potenziometriche (a)	25
1.5	Misure potenziometriche (b)	27
1.6	Potenziometro di Kelvin	29
1.7	Misura di correnti e tensioni in AC	29
1.8	Effetti termici	30
1.9	Elettrometro a bilancia	30
1.9.1	Principi di funzionamento	30
1.9.2	Calcolo della forza *	31
1.10	Elettrometro a quadranti	33
1.11	Strumenti elettrodinamici	34
1.11.1	Generalità	34

1.11.2	Amperometro e voltmetro in corrente alternata	37
1.11.3	Wattmetro	38
1.12	Strumenti AC basati su PMMC	41
1.12.1	Voltmetro AC	41
1.12.2	Amperometro AC	43
2	Strumenti elettronici	47
2.1	Voltmetri digitali **	47
2.1.1	Conversione a singola rampa	47
2.1.2	Conversione a doppia rampa	48
2.1.3	Conversione tensione-frequenza	49
2.1.4	Conversione A/D con rampa a gradini	50
2.1.5	Conversione A/D per successive approssimazioni	50
2.2	Tensioni AC : misura della tensione di picco	51
2.3	Tensioni AC : misura di rms	52
3	Oscilloscopi	53
3.1	CRT	53
4	Metodi di confronto per la misura R,L,C	57
4.1	Misura di resistenze : ponte di Wheatstone	57
4.2	Misura a ponte di piccole resistenze *	58
4.3	Misure di resistenze di grande valore	60
4.4	Misure di capacità	61
4.5	Ponti per induttanze	63
4.6	Ponte di Maxwell-Wien	65

4.7	Schema a confronto di induttori	66
4.8	Rappresentazione dell'incognita nei ponti serie e parallelo	67
4.8.1	Circuiti ponte serie	67
4.8.2	Circuiti ponte parallelo	67
4.9	Posizione degli elementi variabili	68
4.10	Sorgenti di errore	68
4.11	Misura di L e C con tecniche digitali	69
4.12	Misure di L in alta frequenza	70
4.12.1	Circuiti a risonanza	70
4.13	Metodi di ponte- <i>Complementi</i> **	70
4.13.1	Principio e schema fondamentale. Modi di impiego con correnti continue	70
4.13.2	Tecniche e accorgimenti di misura	71
4.13.3	Intercambiabilit� dei lati opposti e delle diagonali	73
4.13.4	Teoria generale del ponte	75
4.13.5	Sensibilit� del metodo a ponte	79
4.13.6	Ponti a deviazione	82
4.13.7	Doppio ponte di Thomson (Lord Kelvin)	83
4.13.8	Metodi di ponte a corrente alternata	85
4.13.9	Esempi di ponti a corrente alternata	88
4.13.10	Ponti a corrente alternata con pi� di quattro lati	95
4.13.11	Ponti automatici a corrente alternata	97
4.13.12	Le schermature nei ponti in corrente alternata	97
4.14	Ponti a lati di rapporto induttivi (Ponti a trasformatore)	102
4.14.1	Impiego di pi� condensatori campione sul ramo di riferimento	103
4.14.2	Impiego di un divisore potenziometrico tipo Thompson-Varley	104

II	Sensori e Trasduttori	107
5	Sensori e Trasduttori	109
5.1	Sensori di temperatura a termocoppia	109
5.1.1	Termocoppia	109
5.1.2	5 Leggi di impiego della termocoppia	110
5.1.3	Esempio di impiego di una termocoppia	111
5.2	Termocoppie- <i>Complementi</i>	113
5.2.1	Generalità.	113
5.2.2	Caratteristiche di una termocoppia.	113
5.2.3	Legge delle temperature successive.	114
5.2.4	Legge dei metalli interposti.	115
5.2.5	Circuiti e metodi di misura.	117
5.2.6	Serie termoelettrica.	120
5.2.7	Termocoppie di uso più frequente.	121
5.2.8	Protezione delle termocoppie.	122
5.3	Sensori di temperatura a resistenza elettrica	124
5.3.1	Generalità.	124
5.3.2	Materiali e caratteristiche dei termometri a resistenza.	124
5.3.3	Conformazione dei termometri a resistenza.	126
5.3.4	Termistori.	126
5.3.5	Protezione dei termometri a resistenza.	127
5.3.6	Circuiti di misura e precisioni raggiungibili.	127
5.3.7	Schema di utilizzo di un sensore resistivo	128
5.4	Circuiti di compensazione e misura per sensori a termistorei *	129

5.5	Circuiti di compensazione e misura per sensori resistivi al platino *	130
5.6	Transistori come sensori di temperatura *	131
5.7	Sensori di pressione	133
5.8	Misure di deformazione	133
5.8.1	Generalità.	133
5.8.2	Estensimetri a resistenza elettrica.	134
5.8.3	Altri tipi di estensimetri. *	145
5.8.4	Taratura degli estensimetri.	146
5.8.5	Osservazioni.	147
5.9	Piezoelasticità	147
5.10	Dispositivi piezoelettrici	148
5.11	Accelerometri	152
5.12	Elementi capacitivi sensibili allo spostamento	153
5.13	Dispositivi di tipo induttivo per la misura dello spostamento	155
5.14	Trasformatore differenziale per la misura di spostamenti lineari (LVDT)	158
5.15	Sonde di corrente ad effetto Hall	158
5.16	Sensori di umidità **	159
III	Struttura generale di un sistema di misura	163
6	Struttura generale di un sistema di misura	165
6.1	Caratteristiche statiche di un sistema di misura	165
6.2	Tipi di misurazioni	166
6.3	Misure ed errori	168
6.3.1	Sorgenti di errore	169

6.4	Propagazione degli errori	170
APPENDICI		172
A	Sistema Internazionale	175
A.1	Sistema Internazionale	175
A.2	Prefissi dei multipli e sottomultipli delle unità di misura	176
A.3	Norme di scrittura del SI	177
A.4	Grandezze derivate del SI e loro unità di misura	178
B	Esempi di domande d'esame	185

Parte I

Strumenti per la misura di grandezze elettriche

Capitolo 1

Strumenti elettromeccanici

Studieremo la struttura di Amperometri, Voltmetri, Ohmetri. Gli strumenti elettromeccanici si suddividono in :

- *Magneto elettrici (azione campo corrente; PMMC : Permanent Magnet Mobile Coil)*
- *Elettrodinamici*

1.1 Amperometro a bobina mobile

Consideriamo la figura:

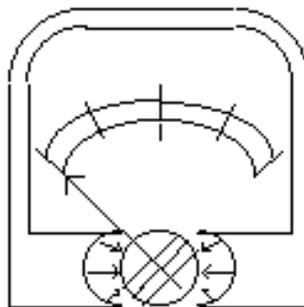


Figura 1.1: Amperometro a bobina mobile

Le espansioni polari (pole shoes) sono tali da generare un campo magnetico a simmetria radiale (nella regione di traferro le linee di forza hanno una direzione radiale rispetto al centro del cilindro). Il cilindro è in ferro dolce ad alta permeabilità magnetica. La componente radiale del campo è uniforme tra le espansioni polari ed il nucleo; sul cilindro è avvolta una spira (coil). Quando la bobina è percorsa da corrente ruota (su un perno fisso), e l'indice quantifica tale rotazione. La rotazione è contrastata da una molla a spirale (molla=spring). La coppia è dunque bilanciata dalla forza di deformazione della molla.

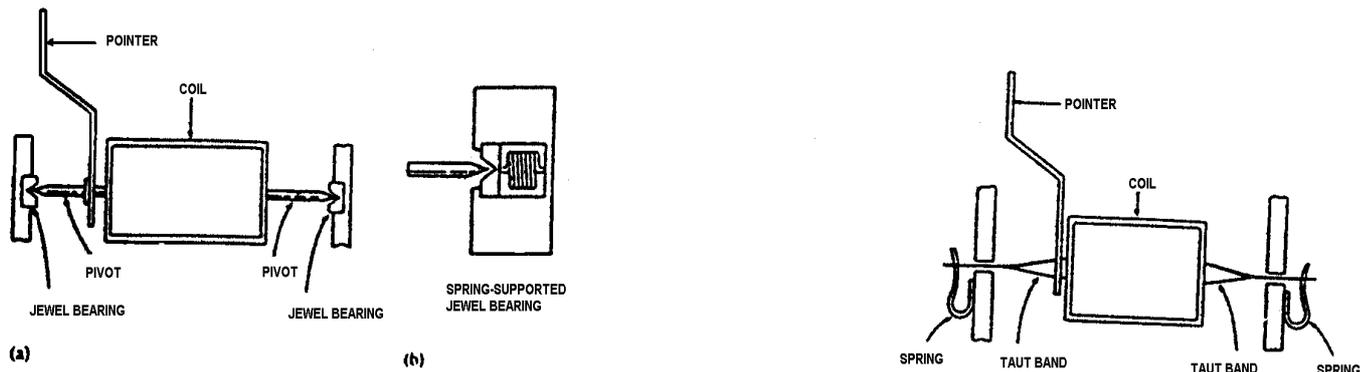


Figura 1.2:

L'asse del cilindro poggia su due cuscinetti a basso attrito (fig. 1.2 5-5a). Per ridurre ulteriormente gli attriti tra perno e struttura portante è possibile sostituire i cuscinetti con sostegni realizzati con "pietre dure": tale soluzione però implica una elevatissima delicatezza dello strumento. Un'alternativa è quella di appoggiare il perno del cilindro direttamente su una molla (maggiore robustezza agli urti (fig. 1.2 5-5b)). Altra soluzione è quella di impiegare un nastro teso (taut band): esso sorregge il cilindro e funziona anche da molla di richiamo (fig. 1.2 5-6). Il puntatore è dotato di un contrappeso che porta il centro di massa sull'asse del cilindro. Lo "zero control" consiste di una vite accessibile dall'esterno per variare la posizione della molla : si controlla lo zero dello strumento facendo in modo che, quando la corrente che lo attraversa è nulla, l'indice indichi lo zero della scala graduata. La validità della misura è legata allo strumento in sè ma anche al suo impiego nelle giuste condizioni. La lettura della corrente, ad esempio, è effettuata su una scala graduata che talvolta presenta una superficie riflettente tale da indicare all'utilizzatore la posizione corretta di lettura (per evitare errori di parallasse).

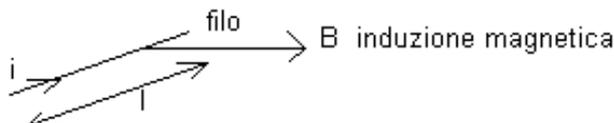


Figura 1.3: Schema vettoriale

Su una metà di un solo avvolgimento della bobina ho una forza:

$$\mathbf{F} = I l \hat{\mathbf{I}} \wedge \mathbf{B}$$

($\hat{\mathbf{I}}$ è il versore della corrente)

$$\text{Coppia di deflessione } C_d = [2(BIl)r]N = NBIld \quad (N=\# \text{ spire della bobina}, d=2r)$$

B è espresso in Tesla, I in Ampère, l e d in metri.

$$[C_d] = [Newton \cdot metri]$$

La bobina si muove in una regione dove l'induzione magnetica è uniforme, perciò la coppia di deflessione non dipende dalla particolare posizione della spira (e quindi della bobina), dipende solo dalla corrente.

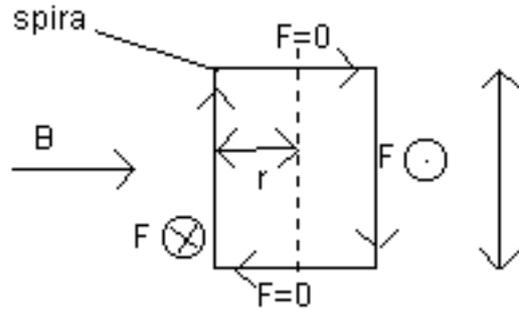


Figura 1.4: Spira

La coppia di controllo $C_C = k\theta$ è proporzionale all'angolo di rotazione θ , mentre k è una costante caratteristica della molla. Abbiamo equilibrio quando $C_D = C_C$ cioè quando $I = \frac{k}{NBld}\theta$

Esempio

Valori tipici :

- $N = 100$ spire
- $B = 0.2T$ (Tesla)
- $d = 10^{-2}m$
- $l = 1.5 \cdot 10^{-2}m$
- $I = 10^{-3}A$
- $C_d = 3 \cdot 10^{-6}Nm$

Ciò che si osserva nella misura non è l'angolo θ ma la posizione dell'indice, calettato alla bobina, rispetto ad una scala graduata. Su tale scala avremo che:

$$\lambda = L\theta$$

dove λ è la deviazione lineare dell'indice, osservata su una scala graduata, mentre L è la lunghezza dell'indice. Otteniamo quindi:

$$I = \frac{k}{NBldL}\lambda = K_a\lambda$$

K_a è detta "costante amperometrica" dello strumento.

Valori tipici (*Galvanometro*= "amperometro a bobina mobile particolarmente sensibile"):

$$(\text{sensibilità})^{-1} = \begin{cases} 0.1 \div 1 & \mu A/mm \text{ Galvanometri ad indice meccanico} \\ 0.01 \div 0.1 & \mu A/mm \text{ Galvanometri ad indice ottico} \end{cases}$$

(Nei galvanometri ad indice ottico l'indicazione della corrente è data da un punto luminoso che colpisce uno specchio posto sullo strumento e che va a riflettersi su uno schermo opaco posto anche a diversi

metri di distanza dall'apparecchio; siccome questa soluzione è decisamente scomoda e ingombrante, l'elevata distanza della scala graduata può essere ottenuta deviando più volte il raggio luminoso con numerosi specchi, facendogli percorrere ugualmente un lungo tragitto: lo strumento che così si ottiene è però molto delicato visto che bisogna mantenere il perfetto allineamento tra gli specchi). Si definisce *sensibilità amperometrica* la grandezza:

$$\sigma_a = \frac{\text{variazione grandezza misurata}}{\text{variazione grandezza da misurare}}$$

$$\left[\text{Sensibilità} = \frac{\Delta \text{ segnale in uscita}}{\Delta \text{ segnale in ingresso}} = \frac{\text{Variazione indice}}{\text{Corrente}} \right]$$

Nel nostro caso: $\sigma_a = \frac{d\lambda}{dI} = \frac{1}{K_a}$ Più K_a è piccola e più lo strumento è sensibile. Deve dunque essere piccola la quantità $\frac{k}{NBld}$, ovvero dobbiamo disporre di un elevato numero di spire; tali spire dovranno essere più grandi possibile mentre la costante della molla di richiamo dovrà essere piccola.

Il galvanometro è usato soprattutto per misurare condizioni di equilibrio, misure a corrente nulla (rivelatore di situazioni di bilanciamento); in tali casi si parla di "strumento di zero" - "null detector".

Utilizzo dello strumento a bobina mobile come amperometro

Dato uno strumento, la corrente di fondoscala (corrente corrispondente alla deviazione massima osservabile dell'indice, purchè l'indicazione resti corretta) è fissata. Tipicamente tale valore è qualche frazione di mA. Nasce un problema di delicatezza nella fase di misura per non danneggiare lo strumento con correnti eccessive. Per voler misurare correnti intense, oltre il valore nominale dell'amperometro, si dispone in parallelo allo strumento una resistenza di "derivazione" o shunt (vedere fig. 1.5).

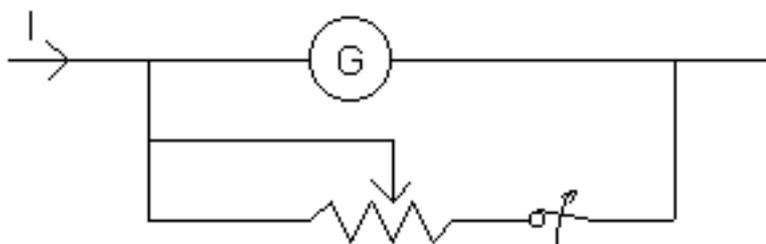


Figura 1.5: Inserimento della resistenza di shunt

Inizialmente l'interruttore è chiuso e la corrente passa attraverso il piccolo resistore di shunt; l'indice della resistenza variabile viene spostato aumentando la corrente su G; raggiunto il valore opportuno l'interruttore è aperto perchè la corrente passi tutta nello strumento di misura. Così facendo l'apparecchio è riparato da correnti eccessive che potrebbero danneggiarlo. Tipicamente si fa uso di resistenze di shunt per misure di correnti di valore superiore per ordine di grandezza alla corrente di fondo scala dello strumento. La resistenza di shunt ha di solito 4 terminali, come mostrato in fig. 1.6, per facilitare l'inserimento dello strumento (amperometro/galvanometro) in parallelo.

Con riferimento alla fig. 1.6, si può dire che i due terminali esterni consentono l'inserimento nel circuito di misura, quelli interni l'inserimento dello strumento di misura. La connessione che si va a realizzare con lo strumento è mostrata nella seguente figura:

Tale configurazione della resistenza di shunt consente di avere in parallelo allo strumento una resistenza

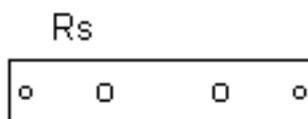


Figura 1.6: Resistenza di shunt a 4 terminali

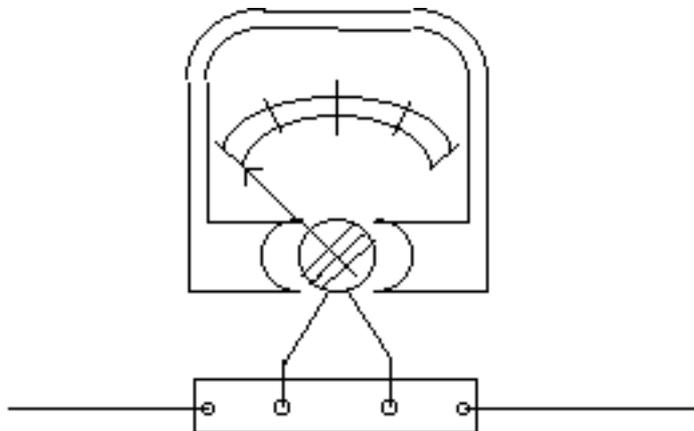


Figura 1.7: Collegamento della resistenza di shunt con l'amperometro

di valore ben definito e a pari a R_s , visto che le resistenze di contatto r rimangono "escluse" da questo parallelo, così come evidenziato nella seguente figura:

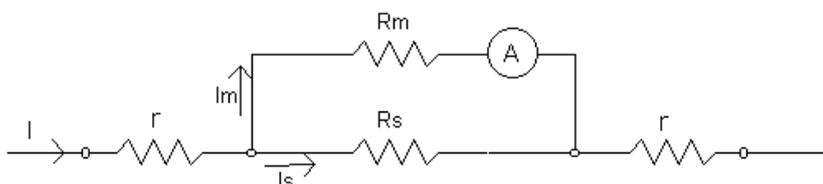


Figura 1.8: Schema elettrico relativo alla figura 1.7

Interessa esprimere la relazione tra la corrente che scorre in R_s e quella che passa nell'amperometro. R_m è la resistenza degli elementi conduttori all'interno dello strumento di misura (spira, molla, ...)

La relazione fra le due correnti sarà data da

$$I = I_m + I_s = I_m \left(1 + \frac{I_s}{I_m} \right)$$

I_m e I_s sono in parallelo \implies stessa tensione \implies proporzione inversa rispetto ai valori delle resistenze.



Figura 1.9: È un puro indicatore (un corto circuito, dal punto di vista elettrico)

Da questa considerazione ottengo che

$$I = I_m \left(1 + \frac{R_m}{R_s} \right)$$

Misurando la I_m e conoscendo il rapporto delle resistenze determino la I . La massima corrente misurabile dallo strumento (dotato di resistenza di shunt) è:

$$I_{max} = I_{fs} \left(1 + \frac{R_m}{R_s} \right) \quad \text{con } I_{fs} = \text{corrente di fondoscala}$$

Quindi dato il campo di correnti delle quali io voglio una misura e data I_{fs} , determino il valore della R_s

Riassumendo :

- Dato lo strumento ho I_{fs} e R_m
- Dato il campo di correnti da misurare si conosce I_{max}

Pertanto:

$$R_s = \frac{R_m}{\frac{I_{max}}{I_{fs}} - 1}$$

Esempio Dati:

- $I_{fs} = 100\mu A$
- $R_m = 1K\Omega$

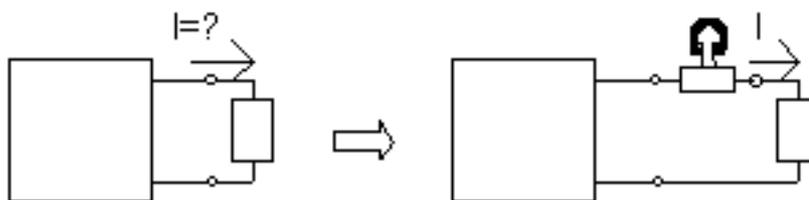


Figura 1.10: Esempio

Se $I_{max} = 100mA \implies R_s = 1.001 \Omega$. Se $I_{max} = 1A \implies R_s = 0.10001 \Omega$ Se $I_{max} = I_{fs}$ la resistenza R_s richiesta è infinita, ovvero non mettiamo lo shunt.

Osservazione 1): se la R_m risulta particolarmente sensibile alla temperatura, influenzando dunque la misura attraverso il rapporto R_m/R_s , si provvede a disporre in serie allo strumento una resistenza

(detta di "swamping") maggiore di R_m , realizzata con materiali con elevata sensibilità alla temperatura (leghe : manganina - Cu,Mn,Ni; costantana - Cu,Ni): tale resistenza bilancia le variazioni di R_m con la temperatura.

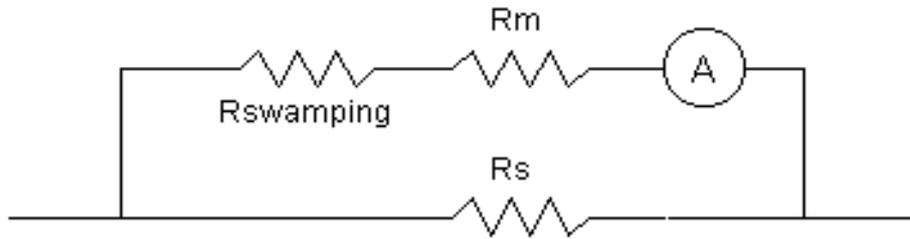


Figura 1.11: Esempio

Osservazione 2): se si deve cambiare la resistenza di shunt per avere uno strumento con portate (correnti massime misurabili) differenti si può impiegare una resistenza variabile (vedere figura 1.12). Nel modificare il valore di resistenza, è necessario che la spazzola effettui il contatto con la resistenza di shunt successiva prima di interrompere il contatto con la precedente; altrimenti si avrebbe un picco di corrente sullo strumento, ovvero avremmo per un istante tutte le resistenze di shunt disinserite e quindi tutta la corrente attraverserebbe l'amperometro (A,B,C contattano shunt diversi) danneggiandolo. Per venire incontro a questa necessità la spazzola della resistenza variabile viene realizzata come indicato in fig. 1.12.

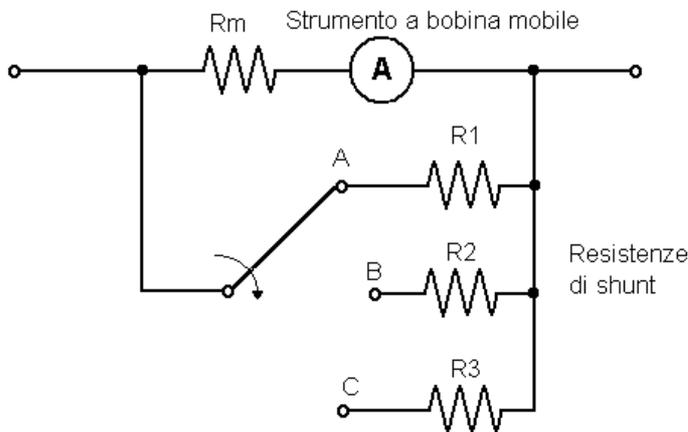


Figura a)

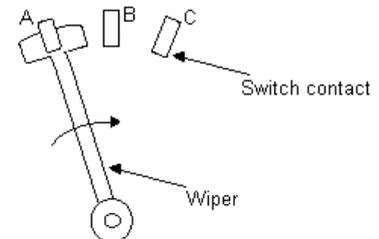


Figura b)

Figura 1.12: Amperometro multirange con resistenze di shunt selezionabili

Inserendo la resistenza di shunt, lo strumento perde parte della sua sensibilità, infatti: $I_m = K_a \lambda$

$$I = K_a \left(1 + \frac{R_m}{R_s}\right) \lambda$$

$$\sigma_a = \frac{d\lambda}{dI} = \frac{1}{K_a \left(1 + \frac{R_m}{R_s}\right)}$$

Comunque tale perdita di sensibilità non importa più di tanto, perchè lo shunt si impiega per misurare correnti elevate, e in tali misure può aumentare l'errore assoluto ma rimanere invariato quello relativo.

Lo strumento che abbiamo analizzato, l'amperometro a bobina mobile, è per natura polarizzato : abbiamo fissato a sinistra l'indice di zero, quindi può indicare la corrente solo in un certo verso.

1.2 Voltmetro DC a bobina mobile

Lo strumento a bobina mobile ora visto può essere anche impiegato come voltmetro se gli viene inserita in serie una opportuna resistenza R_s detta "resistenza moltiplicatrice".

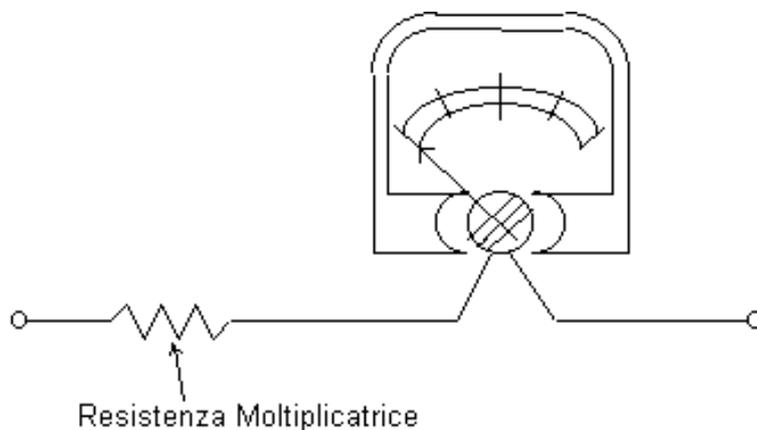


Figura 1.13: Voltmetro DC a bobina mobile

In termini elettrici abbiamo la seguente rappresentazione:

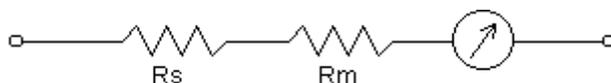


Figura 1.14: Rappresentazione in termini elettrici della figura 1.13

Dato lo strumento conosciamo il fondoscala ed R_m : in funzione della tensione massima che vogliamo misurare scegliamo R_s :

$$V_{max} = (R_s + R_m)I_{fs} \quad R_s = \frac{V_{max}}{I_{fs}} - R_m$$

Cambiando R_s si cambia la portata del voltmetro, ovver V_{max} . Questo strumento è caratterizzato da un parametro detto Sensibilità Voltmetrica : è il rapporto tra la resistenza che lo strumento offre

e la tensione massima misurabile. Questa quantità risulta essere uguale all'inverso della corrente di fondoscala.

$$\frac{1}{I_{fs}} = \frac{\text{resistenza totale dello strumento}}{\text{tensione massima misurabile}} := S$$

Si deduce che definendo S definisco di conseguenza la sensibilità dello strumento PMMC stesso: ad alte I_{fs} corrisponde uno strumento poco sensibile e viceversa.

Esempio (*valori tipici*)

$$S = \frac{500 \text{ K}\Omega}{50 \text{ V}} [\text{A}^{-1}]$$

Per avere un voltmetro a più scale sarà sufficiente variare il valore della resistenza serie R_s ; ciò si può ottenere con schemi del tipo:

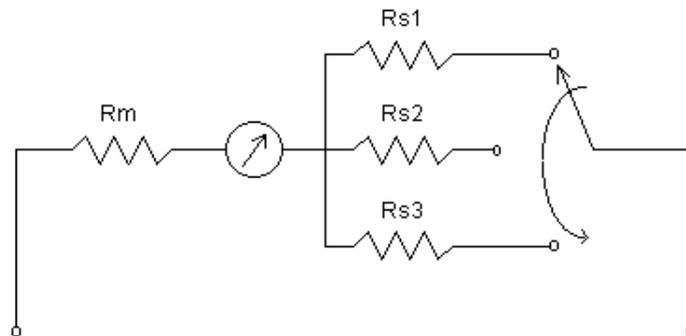


Figura 1.15:

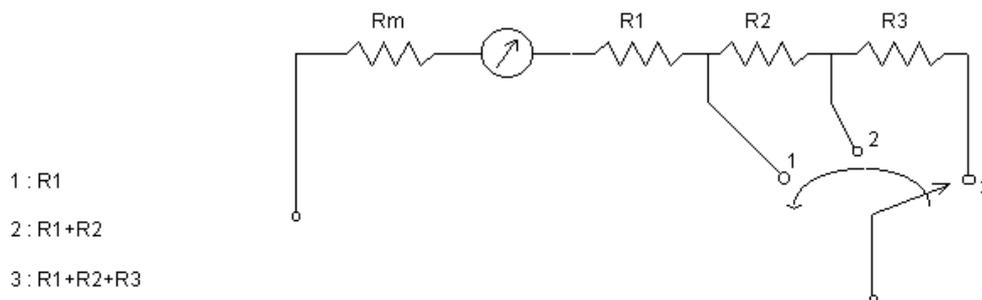


Figura 1.16: Esempio di variazione della resistenza R_s

Studiamo l'influenza dello strumento sulla tensione da misurare, gli effetti, cioè, dell'inserzione del voltmetro nel circuito in cui voglio rilevare la tensione. Dalla definizione di sensibilità :

$$R_s = SV_{max} - R_m$$

Mi interessa la tensione sui nodi A,B:

Assumiamo di lavorare con un circuito lineare; effettuiamone la sintesi di Thévenin. In condizione di circuito aperto (R_c infinita) abbiamo:

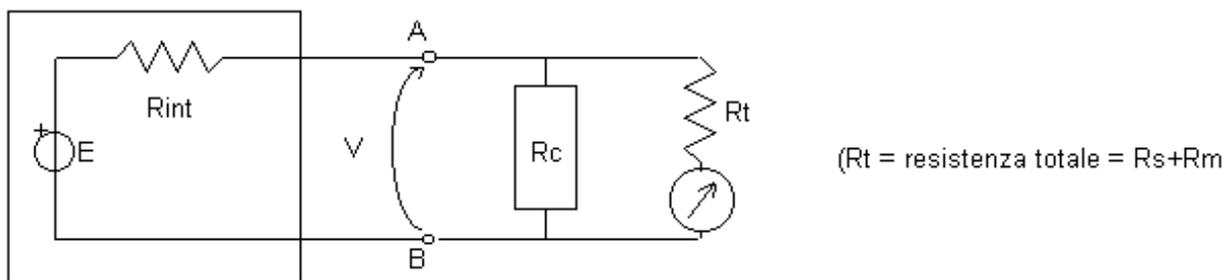


Figura 1.17:

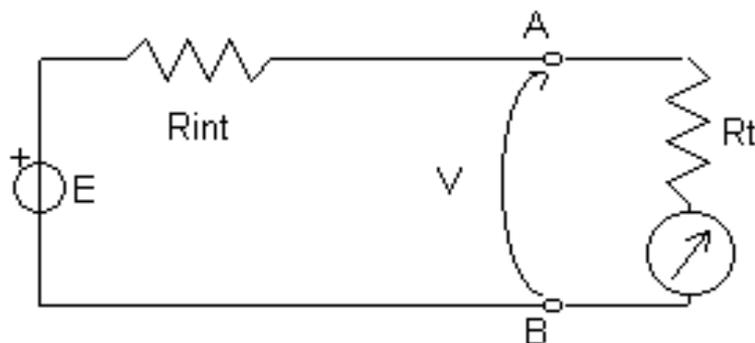


Figura 1.18:

$$V = \frac{E}{\underbrace{R_{int} + R_t}} R_t \neq E$$

Corrente che attraversa lo strumento

dove E è la tensione sul carico prima dell'inserzione del voltmetro; V è la tensione che viene misurata dallo strumento:

Valutiamo l'errore relativo dovuto all'inserzione del voltmetro:

$$e_r = \frac{E - V}{E} = \frac{E - E \frac{R_t}{R_{int} + R_t}}{E} = \frac{R_{int}}{R_{int} + R_t} = \frac{\frac{R_{int}}{R_t}}{1 + \frac{R_{int}}{R_t}}$$

L'andamento dell'errore relativo in questa situazione è:

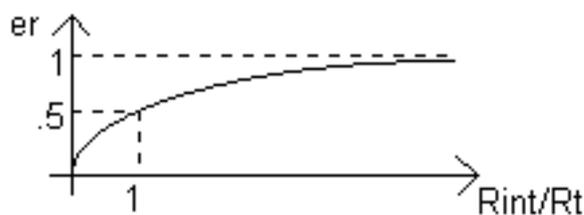
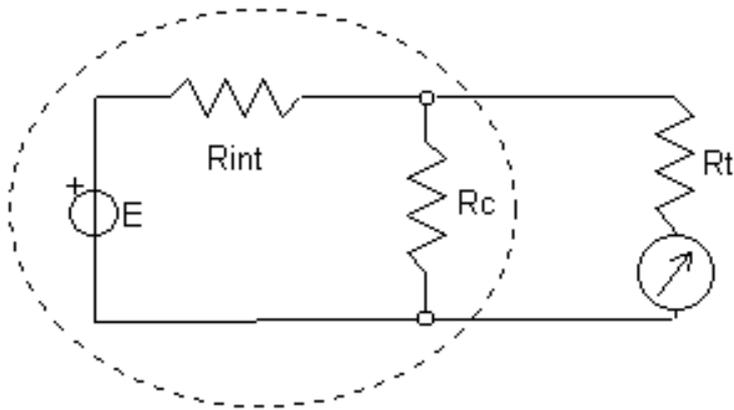


Figura 1.19: Grafico

Nel caso in cui R_c non sia infinita, l'errore relativo viene ricavato rapportando la resistenza del voltmetro con la resistenza del circuito in cui inserisco lo strumento per effettuare la misura. Abbiamo:



...e includendo R_c nel circuito equivalente...

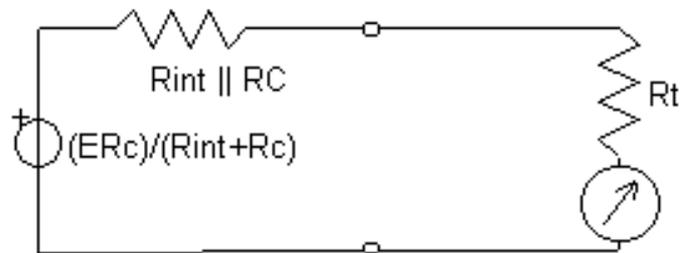


Figura 1.20:

L'andamento dell'errore relativo è il seguente:

$$e_r = \frac{\frac{R'_{int}}{R_c}}{1 + \frac{R'_{int}}{R_c}}$$

L'andamento dell'errore è del tipo $\frac{x}{1+x}$.

Esempio

Dati :

- $R_c = \infty$
- $R_t = 100 \text{ K}\Omega$
- $R_{int} = 10 \text{ K}\Omega$

Si ottiene :

$$e_r = \frac{0.1}{1 + 0.1} = 10\%$$

$$R_c = 10 \text{ K}\Omega \implies R_c \parallel R_{int} = 5 \text{ K}\Omega$$

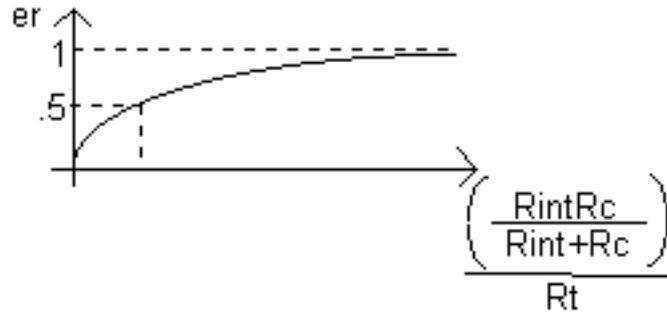


Figura 1.21: Grafico

$$e_r = R_c \parallel R_{int} R_t = 0.05 = 5\%$$

Osservazione: $R_m + R_s = SV_{max} \rightarrow$ noto/fissato che sia il circuito in cui inserire lo strumento, ovvero la sua resistenza interna, resta di conseguenza determinato l'errore relativo. Per diminuire quest'ultimo non è lecito porre una ulteriore \bar{R} in serie allo strumento, perchè così facendo non migliora affatto le cose, infatti lo strumento non arriva più a misurare a fondoscala. Perciò, in conclusione la resistenza moltiplicatrice da impiegare è univocamente determinata dalla relazione $R_m + R_s = SV_{max}$. Da notare che abbiamo bisogno di e_r piccolissimi; in questa situazione la relazione $e_r = \frac{x}{1+x}$ può essere approssimata con $e_r \simeq x$; ciò $\rightarrow R_m + R_s \gg R_{carico}, R_{circuito}$.

La perturbazione relativa che ho con R_c infinita è minore di quella che ho per R_c finita, in quanto nel primo caso non ho corrente -senza voltmetro - ed ho corrente -collegando lo strumento; nel secondo caso ho già una corrente diversa da zero che circola con il voltmetro non collegato, quindi la sua influenza relativa è minore. Se R_c è finito ho errore relativo tanto più piccolo quanto più R_c è piccolo.

Note

Talvolta si impiega una definizione diversa di errore relativo:

$$e_r = \frac{E - V}{V} \quad (E \text{ nominale}, V \text{ misurato})$$

Se $e_r \ll 1$ non c'è differenza (numerica) sostanziale tra le due definizioni. L'errore considerato è l'errore del metodo di misura (sistemico : lo strumento perturba il sistema), non quello intrinseco dello strumento (non metodologico). L'errore intrinseco dello strumento è espresso con un termine di errore in valore assoluto più una percentuale del valore di fondoscala (valore misurato):

$$e_{intrinseco} = e_a + e\%V = \text{percentuale della tensione di fondoscala}$$

Il C.E.I. (Comitato Elettrotecnico Italiano) classifica gli strumenti sulla base della loro precisione. Si parla di classe dello strumento, che è il valore numerico dell'errore percentuale del fondoscala. Si distinguono nove classi ($\pm 0.05\%$, $\pm 0.1\%$, $\pm 0.2\%$, $\pm 0.3\%$, $\pm 0.5\%$, $\pm 1.0\%$, $\pm 1.5\%$, $\pm 2.5\%$, $\pm 5.0\%$).

1.3 Multimetro analogico

Vediamo in particolare l'*ohmetro analogico*:

1.3.1 Schema serie

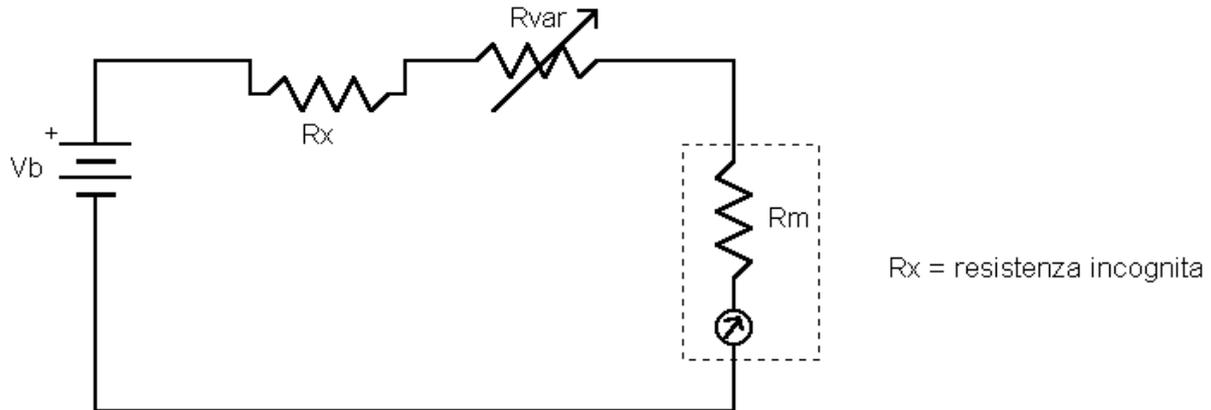


Figura 1.22: Schema serie

$I_m =$ Corrente misurata dall'indicatore $= \frac{V_b}{R_x + R_{var} + R_m} \implies$ La relazione $I_m - R_x$ è di tipo inverso, quindi la scala di resistenze sarà inversa e non uniforme rispetto alla corrente misurata.

Esempio

- $I_{fs} = 50 \mu A$
- $R_m = 1.5 k\Omega$
- $V_b = 1.5 V$
- $R_{var} = ?$

Faccio in modo che $I_m = I_{fs}$ quando $R_x = 0$, cioè $I_{m,R_x=0} = I_{fs} = 50 \mu A = \frac{V_b}{R_{var} + R_m} \implies R_{var} = 28.5 k\Omega$

$$I_{m,R_x=R_{var}+R_m} = 25 \mu A = \frac{V_b}{2(R_{var} + R_m)} = \frac{I_{fs}}{2}, \quad R_x = 30 k\Omega$$

La scala di R va ad infittirsi verso $I = 0$.

Questa soluzione rende lo strumento sensibile al valore della tensione di batteria, nel senso che la graduazione è stata fatta fissando R_{var} in modo tale che I_m ($R_x = 0$) fosse pari alla I_{fs} . Se la V_b diminuisce possiamo avere sempre fondoscala agendo su R_{var} , però si altera il valore di metà scala, così come quello degli altri valori di resistenza.

Vediamo uno schema modificato:

La resistenza complessiva della parte di misura sarà data da :

$$R_T = R_{var} + R_m \parallel R_s \simeq R_{var} \quad (\text{scelta progettuale})$$

In questa condizione il circuito è insensibile alle variazioni di V_b poichè se queste si dovessero presentare sarebbero compensate agendo su R_s senza influenzare R_t .

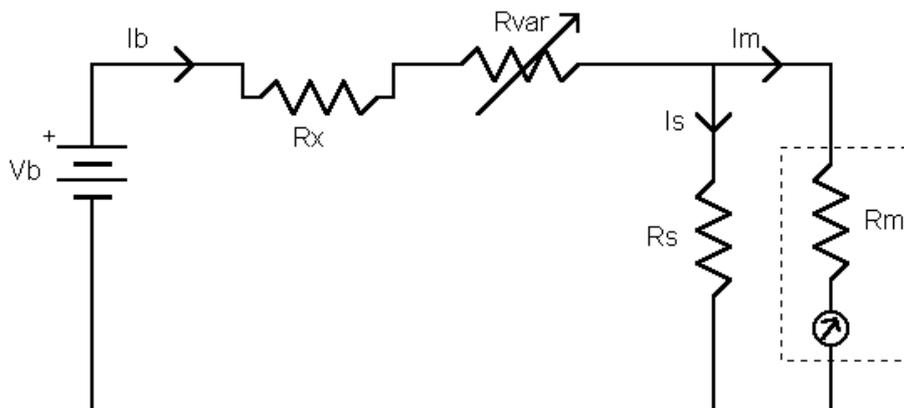


Figura 1.23: Schema modificato

$$I_b = I_s + I_m$$

$$I_b = \frac{V_b}{R_x + R_{var} + R_m \parallel R_s} \simeq \frac{V_b}{R_x + R_{var}}$$

$$I_m = \frac{V_m}{R_m} \simeq \frac{I_b R_m \parallel R_s}{R_m}$$

Vogliamo $I_{m, R_x=0} = I_{fs} = \frac{V_b R_m \parallel R_s}{R_m}$; Se cambia V_b posso avere lo stesso valore agendo su R_s .

Si mantiene costante questa quantità:

$$\frac{V_b R_m \parallel R_s}{R_m}$$

L'influenza sulla corrente di fondoscala delle variazioni della tensione di batteria può dunque essere compensata agendo su R_s e non su R_{var} . Manteniamo la stessa relazione di scala, inserendo $R_x \implies I_m = \frac{V_b R_m \parallel R_s}{(R_x + R_{var}) R_m} \implies$ stessa relazione $I_m - R_x$ avendo calibrato il blocco $\frac{V_b R_m \parallel R_s}{R_m}$ come $I_{fs} R_{var}$.

R_{var} va anche qui a modificare il campo di valori di resistenza nel quale effettuo le misure.

1.3.2 Schema parallelo **

R_x è in parallelo allo strumento; si misura la resistenza in funzione del rapporto delle resistenze R_m ed R_x .

Esempio

- $I_{fs} = 10 \text{ mA}$
- $R_m = 2 \Omega$
- $V_b = 1.5 \text{ V}$
- $R_{var} = ?$

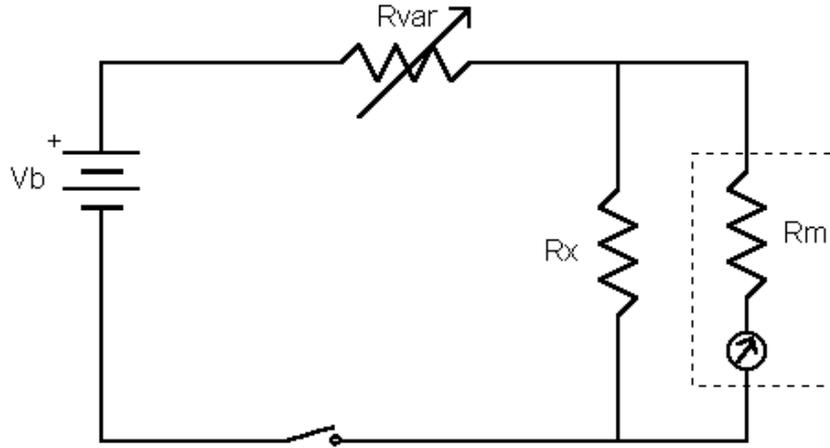


Figura 1.24: Schema parallelo

$$\begin{aligned}
 I_{m, R_x = \text{aperto}} &= I_{fs} = \frac{V_b}{R_{var} + R_m} \implies R_{var} = \frac{1.5}{10 \cdot 10^{-3}} - 2 \Omega = 148 \Omega \\
 I_m &= \frac{V_b}{R_{var} + R_m \parallel R_x} \frac{R_m \parallel R_x}{R_m} = \frac{V_b}{R_{var} + \frac{R_m R_x}{R_m + R_x}} \frac{R_x}{R_m + R_x} = \frac{V_b R_x}{R_{var} R_m + R_x R_{var} + R_m R_x} \\
 &= \frac{V_b}{R_m + R_{var} + \frac{R_m R_{var}}{R_x}} = \text{condizioni di lettura a mezza scala} = \frac{V_b}{R_{var} + R_m} \frac{1}{2} \\
 R_m + R_{var} + \frac{R_m R_{var}}{R_x} &= 2R_{var} + 2R_m \\
 R_{var} R_x + R_m R_x - R_m R_{var} &= 0 \\
 R_x &= \frac{R_m R_{var}}{R_m + R_{var}} \implies R_{x, I_m = \frac{I_{fs}}{2}} = R_m \parallel R_{var} \quad \text{Nell'esempio } R_x = 1.97 \Omega
 \end{aligned}$$

L'interruttore è posto per evitare dissipazione di potenza quando nulla è connesso.

Nella *fotocopia 7* sono mostrati alcuni esempi di sonde, da collegare ad un multimetro, in grado di estendere i range di misura; nella *figura a)* la sonda impiega un partitore per poter misurare alte tensioni, nella *figura b)* la sonda è una pinza amperometrica - tale da non richiedere l'apertura del circuito per effettuare la misura - che include al suo interno un trasformatore con più spire nel secondario che nel primario (questo con una sola spira) per la misura di elevate correnti; la *figura c)* indica una sonda ad effetto Hall; nello *schema d)* la sonda include uno schema di raddrizzamento con condensatore di filtraggio.

1.4 Misure potenziometriche (a)

Strumenti per la misura della tensione senza caricare il circuito di misura. Ci si pone in una situazione di equilibrio.

La misura di V_x è effettuata su una scala graduata posta sul reostato. Il contatto mobile può essere sostituito con una disposizione di resistenze (cosicché le variazioni siano discrete). In condizioni di equilibrio la resistenza di carico per le tensioni di riferimento è costante - ci sono accorgimenti tali che questo avvenga anche per le variazioni discrete. Per le misure di tensioni superiori a quella di riferimento si ricorre a schemi come il seguente:

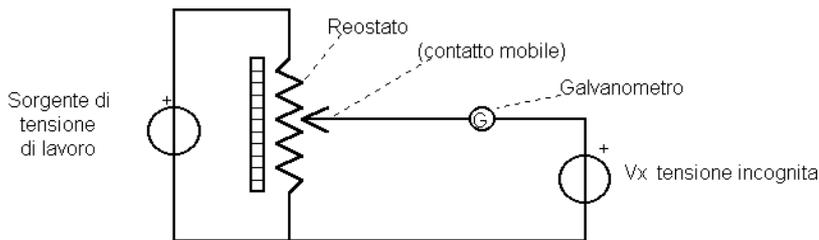


Figura 1.25:

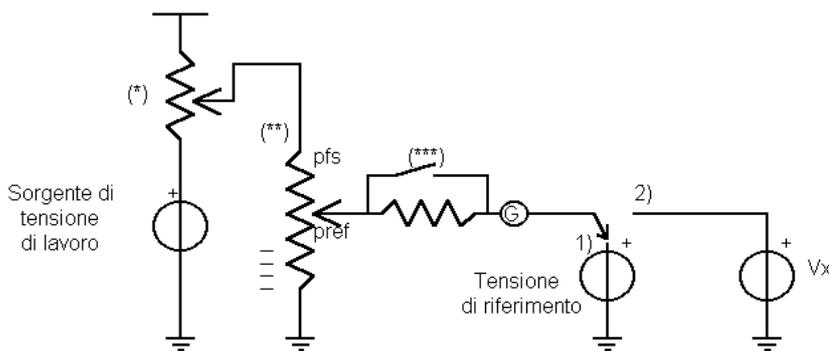


Figura 1.26:

La tensione di lavoro viene calibrata, tramite potenziometro, con quella di riferimento.

1) Fase di calibrazione : confronto tra tensione di lavoro e di riferimento (*). Si determina il valore della tensione in (**) (al valore desiderato). 2) Fase di misura : commuto l'interruttore da 1) a 2) e lavoro con V_x .

L'interruttore (***) connette-sconnette una resistenza limitatrice di corrente per evitare che il galvanometro e V_{ref} siano attraversati da correnti eccessive quando non si è ancora vicini alla situazione di equilibrio.

Esempio

Nella fase di calibrazione metto il secondo reostato sulla prima posizione ("1") e vario il primo in modo da avere equilibrio (indicazione del galvanometro nulla). Se in fase di misura di V_x , ottengo equilibrio spostando il secondo reostato sulla posizione "3.25", allora potrò affermare che $V_x = 3.25 V_{ref}$.

Vediamo un altro caso : $V_{ref} = 1.15$ (nota con precisione) , $V_{lavoro} = 12$; suppongo che il secondo potenziometro mi permetta di variare la resistenza in frazioni di 1/1000, mi metterò allora nella posizione 115 : in questo modo, effettuata la calibrazione (*), disporrò di un fondoscala di 10 V.

$$\frac{p_{ref}}{V_{ref}} = \frac{p_{fs}}{V_{fs}} p_{ref} = \text{posizione del contatto mobile in fase di calibrazione.} \implies \text{determino } V_{fs}$$

Con il primo potenziometro faccio in modo che pref sia in posizione opportuna e posso regolare "finemente" la posizione di equilibrio, meglio di quello che è possibile fare con il solo secondo potenziometro.

$$V_x = \frac{p_{mis}}{V_{fs}} V_{fs} \text{ posizione del secondo potenziometro durante la fase di misura}$$

$$V_x = \frac{p_{mis}}{V_{fs}} \frac{p_{fs}}{p_{ref}} V_{ref} = \frac{p_{mis}}{p_{ref}} V_{ref}$$

1.5 Misure potenziometriche (b)

Facciamo riferimento al seguente schema di principio:

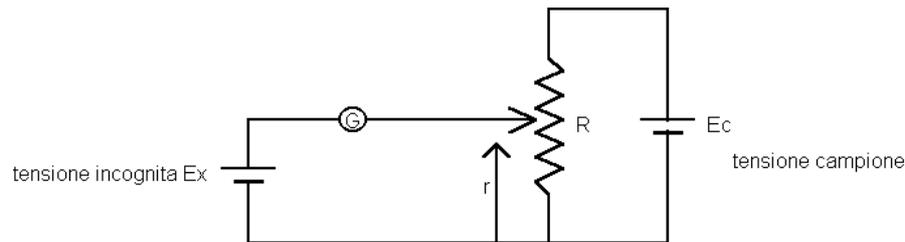


Figura 1.27: Schema elettrico

Il galvanometro consente di stabilire la posizione del contatto mobile nella situazione in cui il galvanometro stesso non è attraversato da corrente. In questa situazione (R =resistenza totale, r =resistenza in questa situazione, ρ =resistenza interna del campione) abbiamo :

$$E_x = \frac{E_c r}{R + \rho_c}$$

Se $\rho \neq 0$ ed è incognita e variabile abbiamo un fattore di incertezza sulla misura; un'ulteriore fonte di incertezza è che il nostro campione eroga corrente. Mettiamoci nella condizione in cui la corrente del campione è nulla:

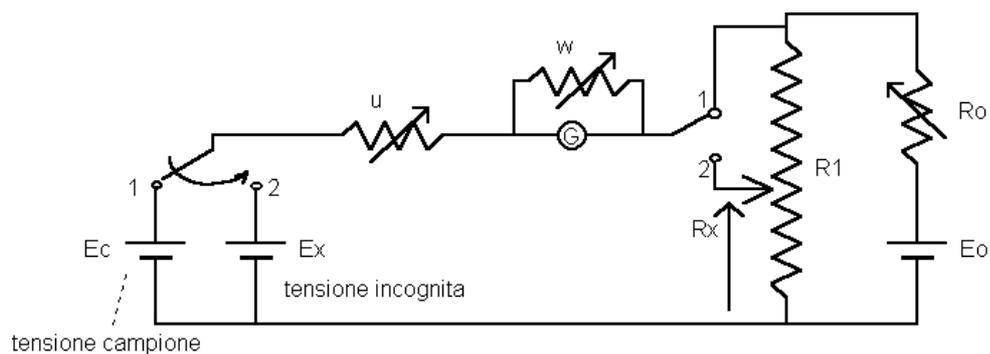


Figura 1.28:

- Commutatori in posizione 1 \implies cerchiamo l'equilibrio tra la tensione campione ed il generatore E_0

$$E_c = \frac{E_0}{R_1 + R_0 + \rho_0} R_1$$

(ρ_0 =resistenza interna al generatore, ρ_c non interviene perchè in condizioni di equilibrio $I_{E_c} = 0$)

- Commutatori in posizione 2 \implies cerchiamo l'equilibrio per quel che riguarda E_x variando R_x

$$E_x = \frac{E_0}{R_1 + R_0 + \rho_0} R_x$$

Dalle due relazioni ricaviamo che

$$E_x = \frac{R_x}{R_1} E_c$$

Quindi abbiamo eliminato il problema di conoscere c e di non far passare corrente nel campione. L'effettuazione della variazione di R_x può essere effettuata in vari modi, ma si preferisce lavorare con commutatori a scatti (discreti). Uno degli schemi migliori è il seguente:

1.6 Potenziometro di Kelvin

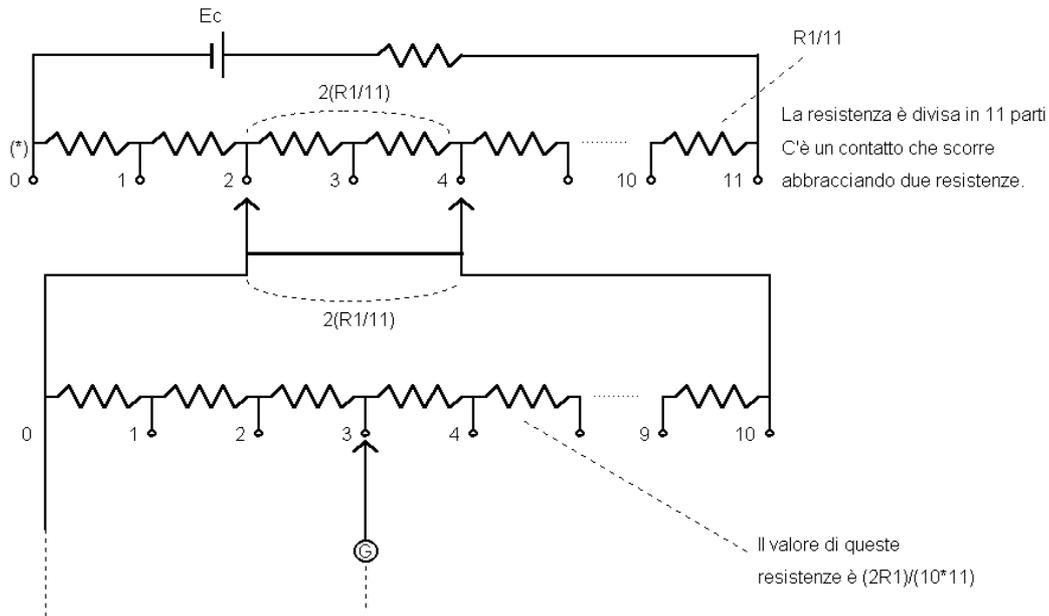


Figura 1.29: Potenziometro di Kelvin

Complessivamente tra i due morsetti abbiamo $10*(2R1)/(10*11) = 2R1/11$. Tale resistenza è in parallelo ad una di pari valore, cosicchè complessivamente forniscano una resistenza totale $R1/11$, e la resistenza totale (*) risulti pari ad $R1$. Si ha una regolazione nell'ordine di $1/100$ della resistenza totale; tale schema può essere ripetuto per aumentare la finezza della regolazione. La suddivisione intermedia deve essere effettuata con la regola "n+1", quella finale con il criterio "dividi per n" in modo tale che la resistenza non vari al variare della posizione del commutatore.

La regolazione è dunque fine e non altera la resistenza vista dal generatore.

Osservazione : Le due resistenze variabili (u e w) del circuito servono l'una per proteggere il circuito da eccessive correnti, l'altra per proteggere (shunt) il galvanometro. Inizialmente quindi si provvederà a mantenere elevata w per proteggere da un sovraccarico di corrente.

1.7 Misura di correnti e tensioni in AC

Lo strumento a bobina mobile ha frequenza di taglio di pochi Hertz (inoltre la coppia di deflessione è costante solo se la corrente nella bobina è continua); ha una notevole inerzia, risponde in definitiva al valor medio della corrente o tensione misurata (a 50Hz questo è già perfettamente evidente). In un segnale a più componenti sinusoidali sono visibili solo la continua e le frequenze più basse. Per la misura di grandezze AC è di interesse rilevare il quadrato della grandezza stessa; ciò può essere realizzato in varie maniere:

1.8 Effetti termici

Dissipazione di energia elettrica i^2R valutata attraverso l'incremento della temperatura misurata mediante termocoppia.

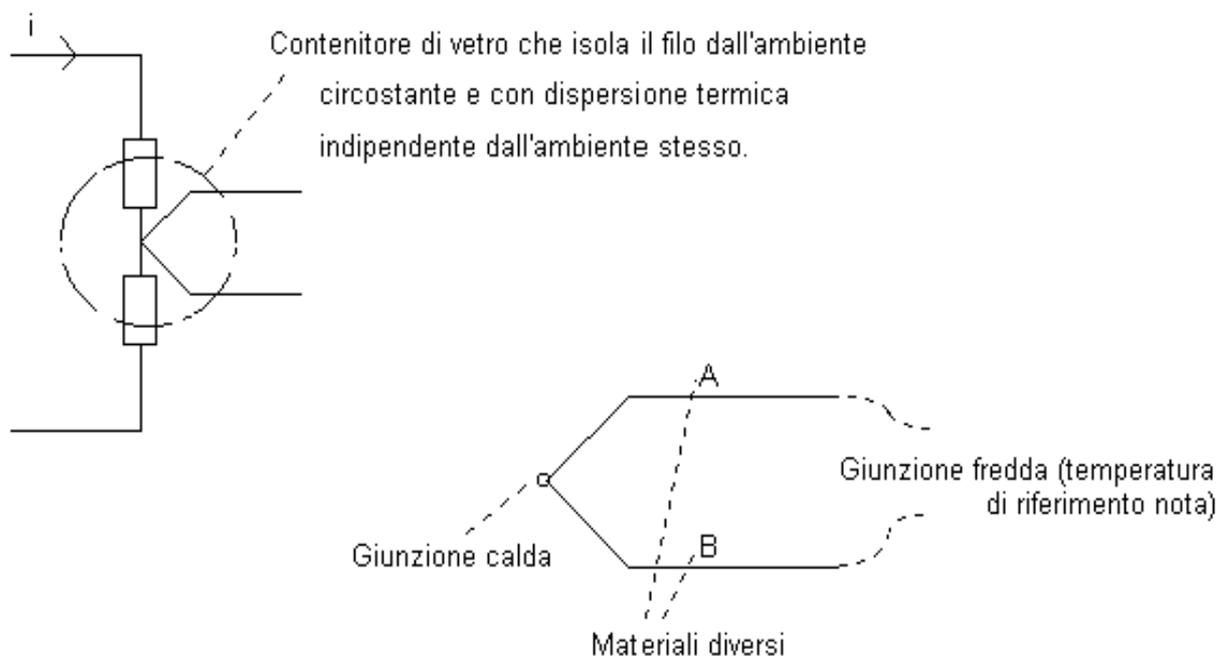


Figura 1.30:

Con la corrente i si alza la temperatura della resistenza ($\propto i^2$). L'incremento di temperatura nel filo è pressochè indipendente dalle condizioni ambientali esterne. La termocoppia (di cui parleremo più diffusamente in seguito) genera una differenza di potenziale legata alla differenza di temperatura tra giunzioni calde e fredde, ovvero un segnale in corrente continua; quest'ultimo può essere agevolmente misurato con uno strumento PMMC. In questo modo misuro il "valor medio del quadrato della corrente". La termocoppia è in contatto termico ma non elettrico con la resistenza (disaccoppia elettricamente i due circuiti). Il sistema consente di effettuare misure fino a frequenze di diversi Mhz.

1.9 Elettrometro a bilancia

1.9.1 Principi di funzionamento

Presentiamo uno strumento particolarmente adatto per la misura di tensioni elevate AC (bassa frequenza -es. 50 Hz). Sfrutta l'effetto di attrazione tra le piastre di un condensatore ad armatura mobile.

Da notare come lo strumento sia dotato, dalla parte della armatura mobile, di un anello di guardia che ha il compito di alleviare i fastidiosi effetti di bordo cui è soggetto il dispositivo; in tal modo le linee di campo elettrico sono abbastanza regolari, oltre che nella parte mobile, anche alla periferia

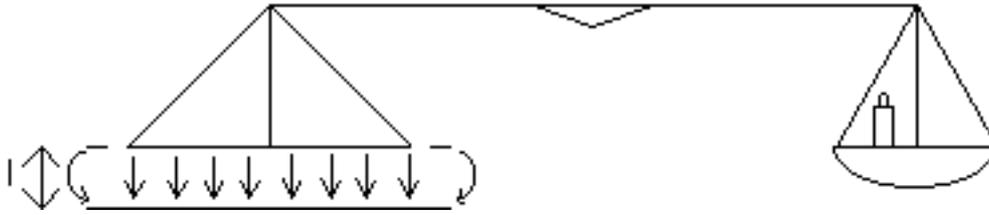


Figura 1.31: Elettrometro a bilancia

delle armature e quindi la capacità del condensatore è accuratamente modellata dalla relazione del condensatore piano:

$$C = \varepsilon \frac{A}{l}$$

La forza di attrazione che si esercita tra le armature del condensatore (che supponiamo piano in questa nostra trattazione) avrà direzione perpendicolare alle armature stesse e sarà misurata in funzione della tensione applicata (nel nostro caso non esistono altre componenti della forza diverse da zero).

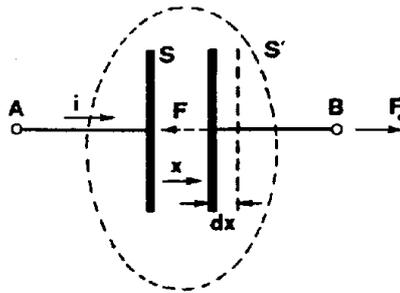


Figura 1.32: Condensatore con armatura mobile

1.9.2 Calcolo della forza *

Per il calcolo della forza suddetta si è scelto, come indicato nella figura precedente, un verso positivo per la stessa e si è inoltre indicato anche quello relativo alla sua "equilibrante F_e " sulla quale effettivamente si svolge il calcolo. Si osserva infatti che la F , essendo una forza interna la sistema (compreso entro la superficie chiusa S'), non può direttamente comparire nella relazione di bilancio energetico, mentre la sua equilibrante F_e , in quanto forza applicata al sistema dall'esterno, compare nel termine di lavoro meccanico (imputabile solamente a forze applicate dall'esterno sul sistema), a patto che si diano al sistema spostamenti virtuali opportuni. Con "spostamenti virtuali" si intende dire che l'unico requisito richiesto agli spostamenti considerati è solo quello di essere concettualmente realizzabili (non importa in che maniera, purchè sia un modo fisicamente possibile). Ne deriva quindi che tali spostamenti possono essere scelti in modo arbitrario e del tutto autonomo rispetto agli eventuali spostamenti reali del sistema. In definitiva, all'insieme arbitrario di spostamenti virtuali (insieme che deve essere scelto opportunamente al fine di far figurare nel bilancio soltanto le forze che interessano) si associa una trasformazione elettromagnetica, essa pure "virtuale" nel senso che deve rispettare l'unico vincolo di essere fisicamente realizzabile. Ciò premesso supponiamo di mantenere ferma un'armatura del

condensatore (quella collegata al morsetto A) e di assegnare invece all'altra armatura uno spostamento virtuale dx , ove x indica la distanza fra le armature, valutata come ascissa dell'armatura mobile rispetto a quella fissa (con tale interpretazione, a un dx positivo corrisponde un aumento della distanza fra le armature). Considerando del tutto generica la trasformazione virtuale che è associata allo spostamento dx (ed escludendo la presenza di fenomeni dissipativi), l'equazione del bilanciamento si scrive come (L_e =lavoro elettrico; L_m =lavoro meccanico):

$$dL_e + dL_m = dE_e$$

$$v i dt + F_e dx = dE_e$$

ove v e i indicano rispettivamente tensione e corrente relativi alla coppia di morsetti A e B mentre E_e è l'energia elettrostatica immagazzinata dal condensatore:

$$E_e = \frac{1}{2} q v = \frac{1}{2} C v^2 = \frac{1}{2} \left(\varepsilon \frac{A}{l} \right) v^2$$

Il bilancio può scriversi introducendo la carica q del condensatore (ricordo $I = \frac{dq}{dt}$):

$$v dq + F_e dx = dE_e$$

Tenendo ora conto che l'energia elettromagnetica è funzione di q e v :

$$v dq + F_e dx = d \left(\frac{1}{2} q v \right)$$

$$v dq + F_e dx = \frac{1}{2} q dv + \frac{1}{2} v dq$$

$$F_e dx = \frac{1}{2} q dv - \frac{1}{2} v dq$$

Ricordando che $C = \frac{q}{v}$ e quindi $dq = v dC + C dv$ risulta:

$$F_e dx = \frac{1}{2} C v dv - \frac{1}{2} v (v dC + C dv) = -\frac{1}{2} v^2 dC$$

Si avrà infine:

$$F_e = -\frac{1}{2} v^2 \frac{dC}{dx}$$

Quest'ultima relazione può considerarsi un'espressione generale, valida per tutti i condensatori (purché si interpreti F_e come la componente della forza equilibrante secondo una direzione x qualsiasi), in quanto fin qui non si è fatto alcun riferimento alle proprietà caratteristiche di un particolare tipo di condensatore.

Nel caso di un condensatore piano in cui la capacità è espressa dalla relazione $C = \varepsilon \frac{A}{l}$, l'equazione della forza equilibrante risulta:

$$F_e = \frac{1}{2} \varepsilon \frac{v^2}{x^2} A$$

Essendo però $E = \frac{v}{x}$ risulta:

$$F_e = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 A$$

ove E indica il campo elettrico fra le armature del condensatore. Tale ultima relazione mostra che F_e è sicuramente positiva e quindi, tenuto conto del verso positivo ipotizzato, la forza equilibrante risulta diretta verso l'esterno del sistema e la forza F secondo il verso opposto. Si conclude pertanto che la

forza elettrostatica che si esercita fra le armature è una forza di attrazione, come del resto è intuitivo. Per quanto concerne il suo modulo, si osserva che esso risulta espresso dal prodotto della superficie A delle armature per una grandezza ($\varepsilon \frac{E^2}{2}$) che ha le dimensioni di una pressione; tale grandezza è spesso indicata come "pressione elettrostatica" del condensatore. Come evidenziato dalle precedenti relazioni, la risposta (forza misurata-tensione) della bilancia elettrostatica è di tipo quadratico perciò tale dispositivo può essere impiegato sia per misure in continua che in alternata (avremo una forza proporzionale al valor medio del quadrato della tensione).

1.10 Elettrometro a quadranti

In questo caso, quando si applica una tensione tra le due armature dello strumento, si genera una coppia tale da far ruotare l'armatura mobile (calettata sullo stesso asse di quella fissa).

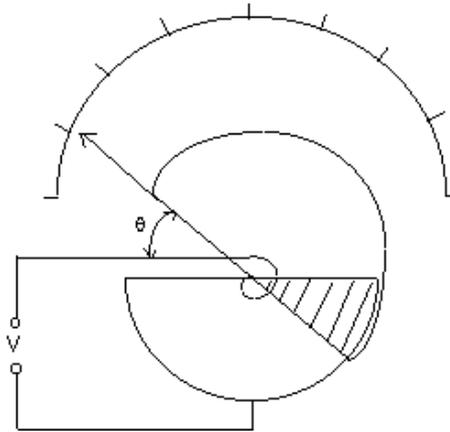


Figura 1.33: Elettrometro a quadranti

La tensione applicata alle due armature fa sì che queste tendano ad aumentare l'area affacciata. In questo modo si genera una coppia, contrastata dalla deformazione della molla: l'indicatore fornirà il valore della tensione. Determiniamo la coppia tenendo in conto che l'energia è legata all'area affacciata e quindi all'angolo θ ; $\theta \propto V^2$. La capacità C varia con l'angolo θ :

$$C(\theta) = \varepsilon \frac{A(\theta)}{x}$$

L'espressione della coppia equilibrante (fornita dalla molla) sarà del tutto analoga a quella trovata per la bilancia elettrostatica, solo che la capacità dipenderà non più dalla x ma dall'angolo θ :

$$C_e = \frac{1}{2} V^2 \frac{dC(\theta)}{d\theta}$$

Il lavoro meccanico compiuto sarà: $dL_m = C_e d\theta$ (per maggiori particolari riguardanti tali calcoli, confrontare con quanto spiegato nel paragrafo successivo).

1.11 Strumenti elettrodinamici

1.11.1 Generalità

Consentono misure di corrente-tensione-potenza in alternata.

Simile allo strumento a bobina mobile, è costituito da due bobine, una fissa (indice f) percorsa dalla corrente i_f e una mobile (indice m), percorsa dalla corrente i_m , che può ruotare intorno all'asse di simmetria longitudinale di entrambe le bobine. Avremo una coppia cui è soggetta la bobina mobile, coppia generata dall'interazione del campo magnetico (creato a sua volta dalla corrente che scorre nella bobina fissa) con la corrente che scorre sulle spire della stessa. La differenza rispetto agli strumenti PMMC sta nel fatto che il campo magnetico è generato da una bobina (o più tipicamente coppia di bobine) fissa, percorsa dalla corrente da misurare, e non da un magnete permanente.

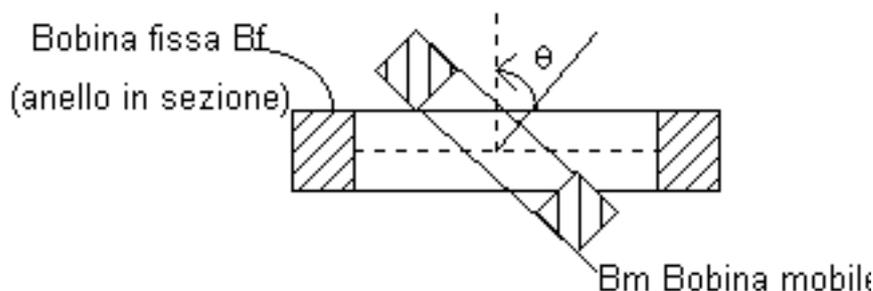


Figura 1.34:

Si può valutare la coppia motrice valutando il campo generato dalla bobina fissa e la forza impressa sulla bobina mobile; in questo caso però il calcolo risulta alquanto complicato in quanto il campo magnetico non è uniforme sulle spire della bobina mobile. Un modo semplice per affrontare questo problema è quello di effettuare il calcolo a partire da considerazioni di tipo energetico sul sistema.

Vogliamo calcolare la coppia C esercitata dalla bobina fissa sulla mobile per una generica posizione di quest'ultima (ossia per il generico angolo θ di figura 1.34 e per due qualsiasi valori delle correnti i_m e i_f). In prima approssimazione si potrebbe pensare la coppia come (E_m =energia magnetica) $C = -\frac{dE_m}{d\theta}$ (in analogia alla scrittura $Forza = -\frac{d(Energia\ potenziale)}{dx}$). Tale ultima espressione, però, non tiene conto delle interazioni elettriche delle bobine con l'esterno, ad es. al variare di θ come varia la corrente e il lavoro elettrico? È preferibile allora affrontare il problema scrivendo l'equazione di bilancio energetico. A tal fine attribuiamo alla bobina mobile una rotazione virtuale $d\theta$ e scegliamo come trasformazione virtuale del sistema quella caratterizzata dalle condizioni $i_m = \text{cost}$ e $i_f = \text{cost}$ (costanti con θ), condizioni che sono fisicamente realizzabili mediante opportune alimentazioni degli ingressi induttivi delle due bobine. Per la suddetta trasformazione, il bilancio energetico si scrive:

$$dL_e + dL_m = dE_m$$

ove L_e =lavoro elettrico e L_m =lavoro meccanico. Sappiamo che: $dL_e = i_f d\phi_{cf} + i_m d\phi_{cm}$ e inoltre $dL_m = C_e d\theta$ ove ϕ_{ci} è il flusso concatenato con la bobina i mentre C_e è la coppia equilibrante di C . Esplicitando il bilancio energetico:

$$i_f d\phi_{cf} + i_m d\phi_{cm} + C_e d\theta = dE_m$$

Tenendo conto del fatto che l'energia magnetica è esprimibile come:

$$E_m = \frac{1}{2}i_f\phi_{cf} + \frac{1}{2}i_m\phi_{cm}$$

Risulta:

$$i_f d\phi_{cf} + i_m d\phi_{cm} + C_e d\theta = \frac{1}{2}i_f d\phi_{cf} + \frac{1}{2}i_m d\phi_{cm}$$

$$C_e d\theta = - \left(\frac{1}{2}i_f d\phi_{cf} + \frac{1}{2}i_m d\phi_{cm} \right)$$

Interpretando il secondo membro di quest'ultima relazione come energia magnetica, si può scrivere:

$$C_e = - \left(\frac{dE_m}{d\theta} \right)$$

La derivata dell'energia magnetica può effettuarsi considerando la seguente espressione dell'energia stessa:

$$E_m = \frac{1}{2}L_f i_f^2 + \frac{1}{2}L_m i_m^2 + M i_f i_m$$

Dove :

- $I_f(I_m)$ = corrente che attraversa $B_f(B_m)$
- $L_f(L_m)$ = induttanza della $B_f(B_m)$
- M = mutua induttanza = $M(\theta)$

Tenuto conto della costanza delle correnti si ottiene:

$$C_e = -i_f i_m \frac{dM}{d\theta}$$

Questa è la relazione conclusiva e si presta alle seguenti osservazioni:

- La coppia corrispondente a un generico angolo θ , è proporzionale al prodotto delle correnti delle due bobine secondo una costante di proporzionalità che dipende, in genere, da θ (negli apparecchi di misura si realizzano talvolta condizioni costruttive tali da poter ritenere M funzione lineare di θ , cosicchè $\frac{dM}{d\theta}$ risulta indipendente da θ).
- L'effettiva difficoltà che si incontra a calcolare la coppia tramite l'ultima relazione proposta è legata alla difficoltà di ricavare la funzione $M(\theta)$ (la determinazione di tale funzione è, di regola, ardua in quanto richiede la conoscenza del campo generato da una bobina).
- qualunque sia la funzione $M(\theta)$, appare evidente sul piano fisico (tenendo conto dell'ipotesi di simmetria del sistema), che, nell'intervallo $-\pi < \theta \leq \pi$, essa ha di regola un massimo per $\theta = 0$ e un minimo (uguale e contrario al massimo) per $\theta = \pi$, conseguentemente essa risulta crescente ($\frac{dM}{d\theta} > 0$) nell'intervallo $-\pi < \theta < 0$, decrescente ($\frac{dM}{d\theta} < 0$) nell'intervallo $0 < \theta < \pi$.
- La precedente analisi qualitativa della funzione $M(\theta)$ consente di affermare che la coppia C risulta nulla per $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ (tali valori corrispondono a due condizioni di equilibrio in assenza di altre coppie agenti sulla bobina mobile); oltre a ciò, se le correnti sono positive, risulta $C < 0$ per $-\pi < \theta < 0$, $C > 0$ per $0 < \theta < \pi$.

- L'osservazione precedente, riguardante il segno di C , mostra come, in ogni caso, in presenza di correnti positive, la coppia che la bobina fissa esercita sulla mobile è tale che quest'ultima, sotto la sua azione, tende a portarsi nella posizione $\theta = 0$; da ciò deriva anche che, per correnti positive, la posizione di equilibrio $\theta = 0$ è stabile, quella $\theta = \pi$ è instabile.

Per una geometria come quella schematizzata in fig. 1.34 potremmo avere il seguente andamento della mutua induttanza:

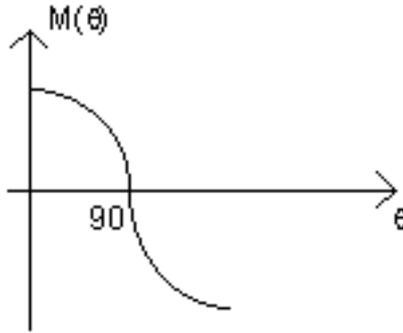


Figura 1.35: Andamento della mutua induttanza

Per quanto riguarda la coppia di deflessione avrà la stessa espressione di quella equilibrante, solo cambiata di segno:

$$C_d = \frac{dE_m}{d\theta} = i_f i_m \frac{dM(\theta)}{d\theta}$$

Se lavoriamo in un intorno di 90° la derivata della mutua induttanza rispetto all'angolo di rotazione della bobina mobile è pressochè costante = k . (Potevamo subito dire che $C_d = k i_f i_m$ con k legato alla geometria del sistema, ma passando per l'energia sappiamo che quel k è $\frac{dM}{d\theta}$ ed è legato dunque ad una precisa grandezza elettrica : la mutua induttanza).

La condizione di equilibrio si raggiunge con $C_d = C_e \propto \theta \propto \alpha$; θ deve essere però essere misurato rispetto alla posizione di riposo della molla (calettata all'indice mobile); tale angolo lo chiamo appunto α =angolo di deflessione dell'indice dalla posizione di riposo. Risulterà: $\alpha = K' i_f i_m$.

Impiego dello strumento elettrodinamico nella misura di grandezze AC: La coppia sarà una grandezza variabile nel tempo e risulterà del tipo:

$$C(t) = k i_f(t) i_m(t)$$

Suppongo $i_f = \sqrt{2} I_f \sin(\omega t)$ e $i_m = \sqrt{2} I_m \sin(\omega t + \beta)$ (i_m in generale sfasata da i_f di un generico $\beta = \text{cost}$) (dove con I_i si indica il valore efficace). Esplicitando la $C(t)$ possiamo affermare che :

$$C(t) = 2k I_m I_f \sin(\omega t) \sin(\omega t + \beta) = 2k I_m I_f \frac{1}{2} [\cos(\beta) - \cos(2\omega t + \beta)]$$

$$C(t) = k I_m I_f \cos(\beta) - k I_m I_f \cos(2\omega t + \beta)$$

Si nota che il termine $\cos(\beta)$ è costante perciò $C(t)$ possiede una componente continua $k I_f I_m \cos(\beta)$ e una alternata di pulsazione 2ω . Il comportamento dinamico (meccanico) dello strumento è di tipo passabasso perciò non risponde alle sollecitazioni a pulsazione 2ω , ma solo a quelle in continua.

Considero allora $\overline{C_d}$ =valor medio della coppia di deflessione= $kI_f I_m \cos(\beta) = \overline{C_d}$. La condizione di equilibrio sarà allora: $\overline{C_d} = C_e \propto \alpha$ con: $\alpha = K' I_f I_m \cos(\beta)$ in alternata, $\alpha = K' I_f I_m$ in continua. Lo strumento risponde ai valori efficaci delle correnti e dipende dall'angolo di fase. Se ne deduce che lo strumento elettrodinamico è utile per effettuare misure sia in DC che in AC.

1.11.2 Amperometro e voltmetro in corrente alternata

Solitamente, per migliorare le caratteristiche del campo magnetico generato dalla bobina fissa, se ne impiegano due; comunque il funzionamento dello strumento non cambia. Tali due bobine fisse sono collegate in modo che la corrente che le attraversa abbia verso tale che i campi magnetici prodotti si sommino e non si contrastino. Inoltre anche la bobina mobile è connessa in modo tale che la corrente che la attraversa sia concorde a quella delle bobine mobili in modo che la coppia di deflessione sia $C_d \propto i^2$ e non $C_d \propto -i^2$, cioè che la deflessione sia in verso positivo ($+\theta$).

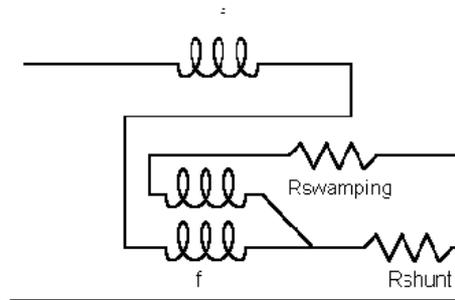


Figura 1.36: Schema elettrico

Senza la R_{shunt} , B_f e B_m sarebbero attraversate dalla stessa corrente I , e la coppia sarebbe proporzionale a I^2 . Per lavorare su portate grandi pongo R_{shunt} e devio parte della corrente. In serie a B_m mettiamo $R_{swamping}$ per ridurre gli effetti della variazione di temperatura (variazione di ripartizione tra la corrente sullo shunt e sulla bobina mobile). Da notare come la $R_{swamping}$ sia preferibile inserirla in serie alla bobina mobile: essa contribuisce a limitarvi la corrente, in tal modo la bobina mobile può essere realizzata con fili più sottili \rightarrow minor peso e minor attrito.

Nel funzionamento come voltmetro si inserisce, in serie allo strumento, una resistenza moltiplicatrice.

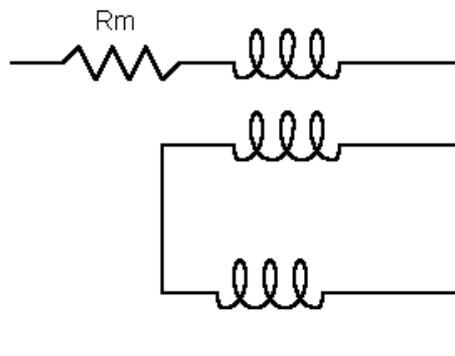


Figura 1.37: Schema elettrico

La sensibilità di questo strumento è ridotta rispetto al caso con magneti permanenti; lavoriamo con frazioni di ampère; il fattore di sensibilità è di circa $10 \frac{\Omega}{V}$ in confronto ai $10 \frac{k\Omega}{V}$ per gli strumenti a magneti permanenti e bobina mobile (PMMC); proprio a causa di questa scarsa sensibilità se ne sconsiglia l'uso per i circuiti elettronici. Gli strumenti a bobina mobile sono però in generale più precisi di quelli PMMC in quanto la risposta dei primi dipende solo da caratteristiche geometriche dello strumento (bobine) e non da caratteristiche dei materiali (come il magnete impiegato nei PMMC), che possono variare con il tempo e con escursioni termiche.

Osservazione : Avendo una risposta proporzionale ad $I_f \cdot I_m$ lo strumento, usato come voltmetro o amperometro, ha una coppia motrice sempre dello stesso segno indipendentemente dal segno della corrente e della tensione. Il segno della coppia dipende dal verso di avvolgimento delle spire.

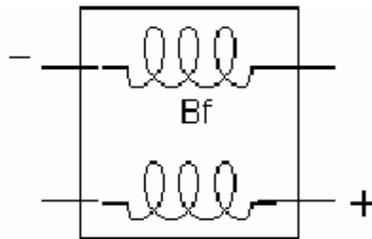


Figura 1.38:

1.11.3 Wattmetro

Un primo possibile schema:

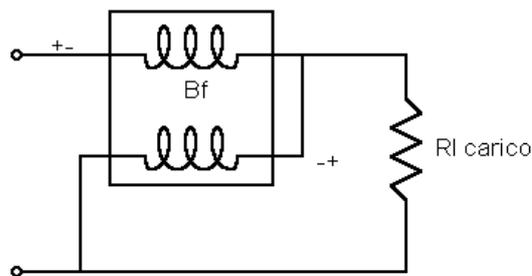


Figura 1.39: Schema elettrico per basse tensioni ed elevate correnti di carico

La corrente che attraversa B_m è proporzionale alla caduta di tensione che si localizza su R_l , mentre la corrente che attraversa B_f è proporzionale alla corrente su R_l : la coppia sarà dunque legata al prodotto della V e della I sul carico, cioè proporzionale alla potenza dissipata. $C_d \propto I_f I_m$ $I_m \propto V_l$ $I_f = I_m + I_l$

$$C_d \propto I_f I_m \propto V_l (I_m + I_l) = V_l I_l \left(1 + \frac{I_m}{I_l} \right)$$

$V_l I_l$ è proprio la potenza sul carico, quella che ci interessa misurare. Il termine "in più" $\frac{I_m}{I_l}$ è tanto più trascurabile quanto più V_l è basso e I_l alto. Perciò a *basse tensioni* ed *elevate correnti* di carico converrà usare lo schema precedente.

Se lavoriamo con *alte tensioni* e *basse correnti* di carico, la configurazione più conveniente sarà la seguente :

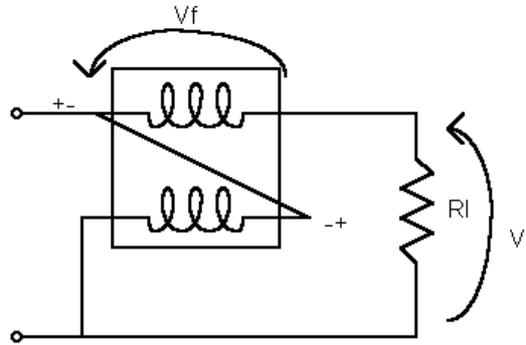


Figura 1.40: Schema elettrico per alte tensioni ed basse correnti di carico

In tale situazione avremo:

$$C_d \propto I_f I_m \propto I_l (V_l + V_f) = V_l I_l \left(1 + \frac{V_f}{V_l} \right)$$

In tal caso l'errore sistematico $\propto \frac{V_f}{V_l}$ è tanto minore quanto più è alta la tensione V_l e tanto minore è la corrente I_l ($\propto V_f$).

In questi schemi si deve rispettare l'indicazione di collegare al carico i morsetti + - in maniera opportuna, ovvero rispettando sempre le polarità indicate da + e -, cosicchè la deviazione dello strumento sia sempre nella stessa direzione.

Wattmetro compensato

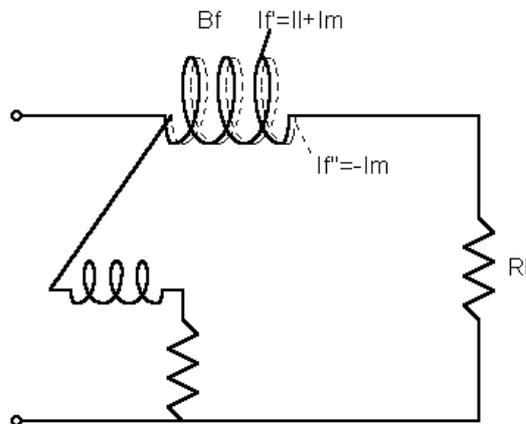


Figura 1.41: Schema elettrico

Su B_f c'è un avvolgimento supplementare con corrente $-I_m$ che è in senso opposto ad I_f ; si ha una

compensazione sulla corrente della B_f .

$$I_f \longrightarrow 2 \text{ avvolgimenti } \begin{cases} I_l + I_m \\ -I_m \end{cases}$$

In tal modo l'effetto complessivo sulla bobina fissa è che ($I_f^{tot} = I_m$) essa porta a creare una $C_d \propto I_f^{tot} = I_l$, quindi I_m non influisce in alcun modo sulla creazione della C_d .

$$C_d \propto I_f^{tot} I_m \propto V_l I_l$$

Quindi il campo è dovuto soltanto alla corrente del carico I_l . Di qui la compensazione. Per non rovinare gli isolamenti delle bobine a causa di surriscaldamenti, è necessario che la portata del wattmetro, in termini di tensione, sia adeguata alla tensione di carico da misurare. Per tale motivo, in sede di misura, è opportuno cominciare con resistenze moltiplicatrici elevate e poi diminuirle pian piano secondo necessità.

1.12 Strumenti AC basati su PMMC

1.12.1 Voltmetro AC

Il fatto che lo strumento elettrodinamico risponda in maniera quadratica, non significa che sia possibile misurare il valore efficace di una grandezza a qualunque frequenza, perchè al crescere di quest'ultima, aumenta in maniera considerevole l'impedenza dello strumento; in definitiva possiamo misurare solo grandezze a frequenze di qualche centinaio di hertz. Lo strumento con termocoppia visto in precedenza, risponde al valore efficace e può essere impiegato per la misura di grandezze anche a radiofrequenza. Quando si hanno dei segnali AC, essi possono essere raddrizzati e poi misurati con PMMC, strumenti che rispondono al valor medio.

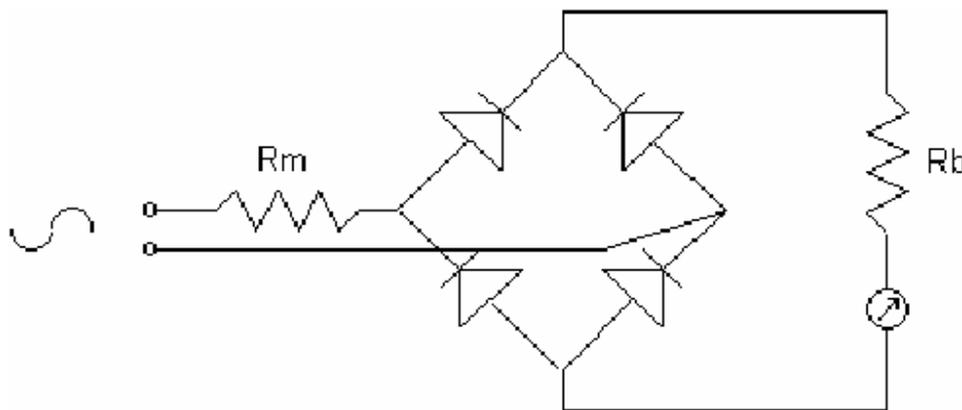


Figura 1.42: Schema elettrico

R_b è la resistenza della bobina mobile. Abbiamo un raddrizzamento della corrente. R_m è una resistenza moltiplicatrice.

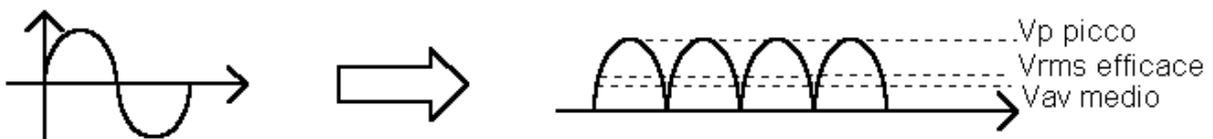


Figura 1.43: Risultato ottenuto

Lo strumento dà un'indicazione proporzionale al valor medio; per onde sinusoidali:

$$V_{av} = \frac{2}{\pi} V_p \approx 0.636 V_p$$

La scala dello strumento è graduata rispetto ai valori efficaci.

$$V_{rms} = V_{efficace} = \frac{1}{\sqrt{2}} V_{picco} \approx 0.707 V_{picco}$$

Considero la seguente tabella:

Waveform	RMS value	Form factor	Multiply AC meter reading by to obtain correct RMS value
	$0.707V_p$	1.111	1.0
	$0.5V_p$	1.571	1.414
	$0.707V_p$	1.111	1.0
	$0.5V_p$	1.0	0.9
	$0.707V_p$	1.414	1.273
	$\sqrt{D}V_p$	$1/\sqrt{D}$	$0.9/\sqrt{D}$
	$0.577V_p$	1.154	1.039
	$0.577V_p$	1.154	1.039

Figura 1.44: Tabella

Attraverso la "form factor", conoscendo il tipo di forma d'onda di partenza e avendola raddrizzata per misurarla, si può calcolare il vero V_{rms} corrispondente alla forma d'onda di partenza. Per uno strumento sensibile al valor medio, da cui viene ricavato quest'ultimo, si ha che: *valor efficace* = (*form factor*) (*valor medio*). Tipicamente la scala dello strumento è graduata in valore efficace, riferito ad un segnale sinusoidale, anche se lo strumento risponde al valor medio del segnale raddrizzato. Se il segnale misurato non è sinusoidale, devo correggere la lettura moltiplicandola per il fattore correttivo.

$$form\ factor = \frac{V_{rms}^{segnale}}{V_{medio}^{segnaleraddrizzato}} = \frac{V_{rms}^{sinusoide}}{V_{medio}^{segnaleraddrizzato}} \frac{V_{rms}^{segnale}}{V_{rms}^{sinusoide}}$$

$$fattore\ correttivo = \frac{V_{rms}^{segnale}}{V_{rms}^{sinusoide}}$$

Con riferimento alla tabella precedente, si nota che la quarta colonna indica i valori per cui moltiplicare la lettura del sistema di misura, per ottenere il corretto valore rms.

Esempio

E' dato un treno di impulsi rettangolari:

Sullo strumento tarato sulle onde sinusoidalmente leggo un valore $V_{rms} = 6.42$; voglio risalire ai valori V_{rms} e V_p reali. Innanzitutto calcolo il duty cycle (ciclo di servizio)

$$D = \frac{0.2}{0.8} = 0.25$$

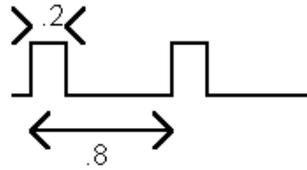


Figura 1.45: Treno di impulsi rettangolari

Il fattore di conversione è $\frac{0.9}{\sqrt{D}}$; quindi:

$$V_{rms-corretto} = 6.42 \frac{9}{\sqrt{0.25}} = 11.56 \text{ V}$$

$$V_{picco} = \frac{V_{rms}}{\sqrt{D}} = 12.84 \text{ V}$$

Ecco lo schema con raddrizzamento a semionda, per ridurre gli effetti di caduta di tensione non lineare sui diodi:

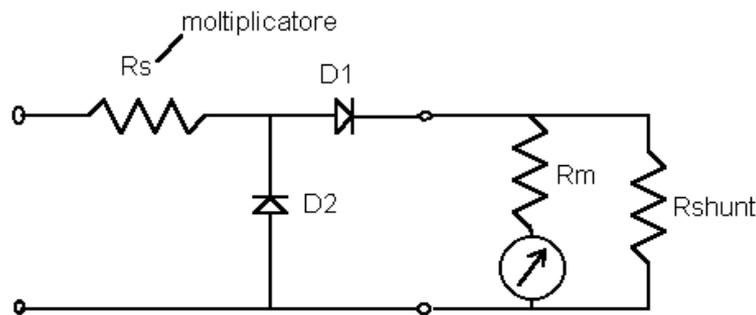


Figura 1.46: Schema con raddrizzamento a semionda

Su D1 scorre una corrente significativa, dunque la tensione ai suoi capi è circa costante; D2 fa sì che quando la tensione è negativa le perdite per corrente inversa su D1 siano piccole, essendo la caduta su D1 piccola. Con tale schema lo strumento è meno sensibile. Il valor medio a mezza onda e la corrente di shunt fanno sì di avere meno corrente sullo strumento di misura. (Lo schema di raddrizzamento in generale dà problemi di sensibilità.)

1.12.2 Amperometro AC

In alternativa a questo schema si può impiegare un trasformatore di corrente e ricorrere alla configurazione vista come voltmetro:

Si consideri la figura 1.49. Nella figura 1.49a è rappresentato lo strumento a bobina mobile ed in figura 1.49b il meccanismo di smorzamento. I materiali magnetici hanno correnti parassite che smorzano il movimento; nello strumento elettrodinamico tale smorzamento è più limitato, quindi si ricorre a meccanismi smorzatori supplementari. Nella figura 1.50 sono evidenziati i versi dei campi magnetici.

Nella tabella di figura 1.51 è presentato un elenco degli strumenti per la misura di correnti-tensioni

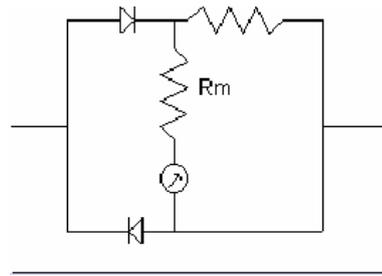


Figura 1.47: Schema elettrico

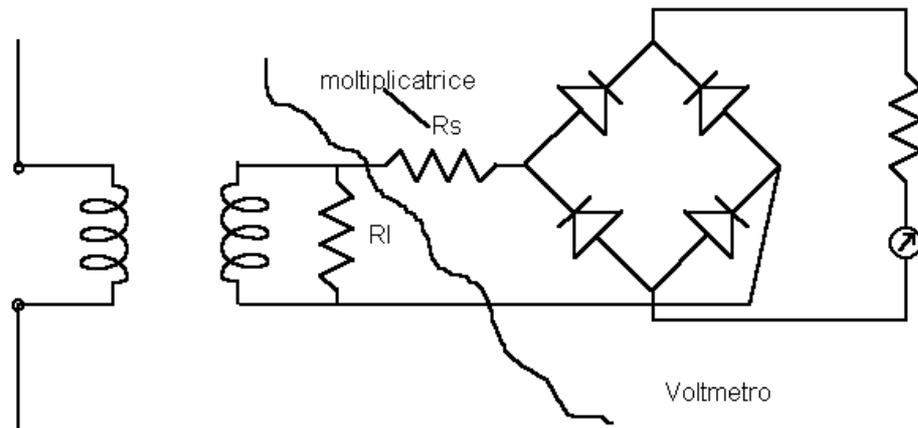


Figura 1.48:

in AC-DC con diversi range. (Lo strumento "moving iron" -a ferro mobile-, che non vedremo nel dettaglio, è caratterizzato da un indice solidale ad un elemento ferromagnetico, attirato da una bobina percorsa da corrente; è robusto ma poco preciso.)

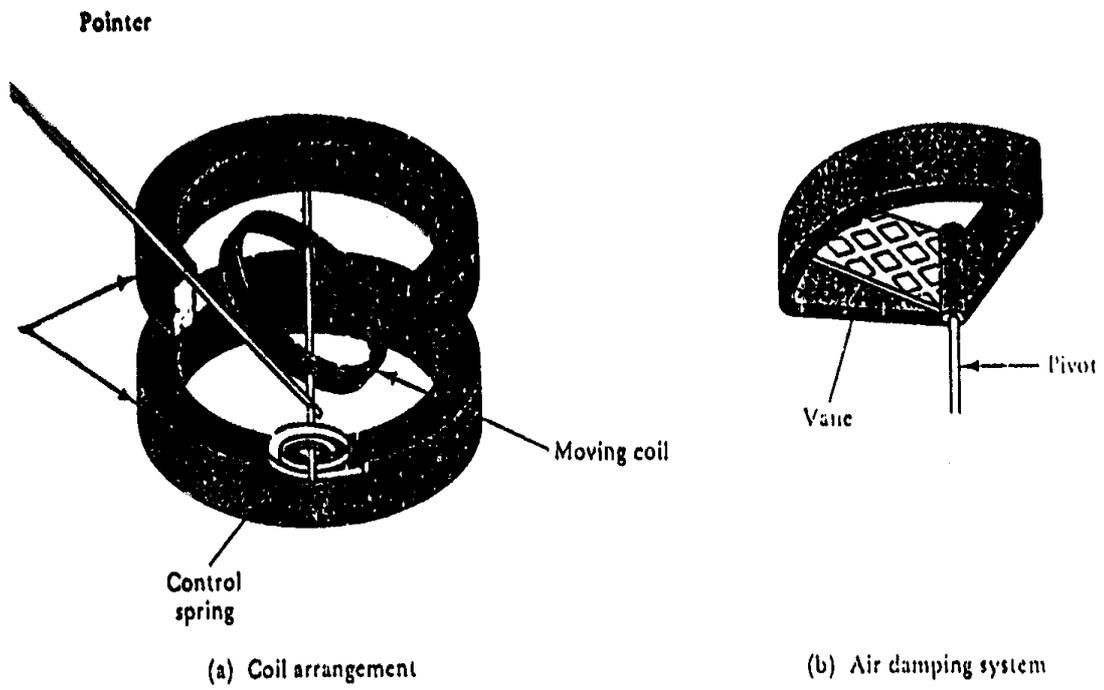


Figura 1.49:

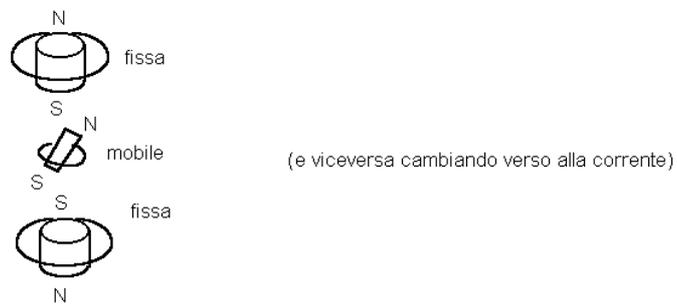


Figura 1.50:

Meter type	Suitability	Major use/feature
d'Arsonval	DC only	DC current and voltage measurement in low and medium impedance circuits
Moving Iron	DC or AC	Rough indication of large current or voltages at power-line frequencies
Electrodynamometer	DC or AC	Precise AC voltage and current measurement at power-line frequencies
Electrostatic	DC or AC	High Voltage measurements
Electronic	DC or AC	Up to high audio frequencies without RF probe. High input impedance
Rectifier	AC only	With a d'Arsonval movement, used for medium sensitivity applications at audio frequencies
Thermocouple	DC or AC	RF currents, low input impedance

Figura 1.51: Classificazione di strumenti AC e DC

Capitolo 2

Strumenti elettronici

2.1 Voltmetri digitali **

Strumento che fornisce l'indicazione della tensione sotto misura in forma numerica.

2.1.1 Conversione a singola rampa

Vediamo uno schema di conversione tensione-tempo a singola rampa. Abbiamo un comparatore che confronta la tensione da misurare con quella fornita da un generatore di rampa (tensione che varia linearmente).

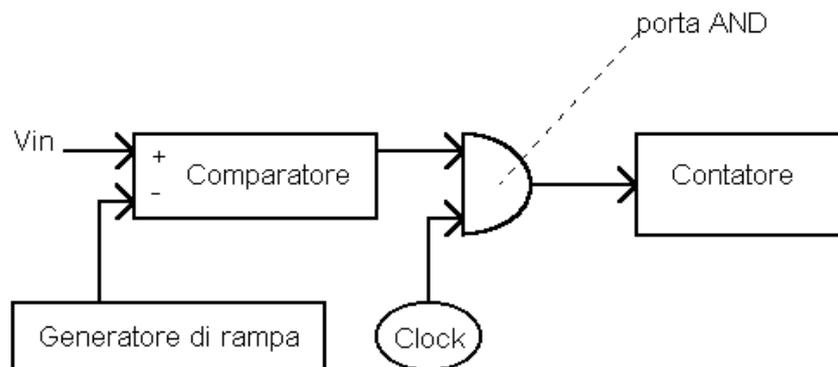


Figura 2.1: Schema di conversione a singola rampa

Quando la tensione V_{in} è minore della tensione a rampa l'uscita del comparatore cambia segno, si interrompe il flusso di segnali che vanno dall'orologio al contatore. Il conteggio del contatore è proporzionale al valore della tensione di ingresso.

Esempio Rampa : $1 \frac{V}{ms}$

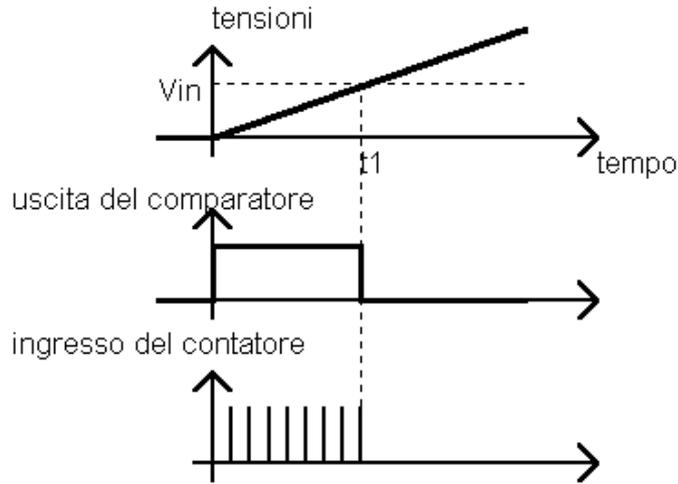


Figura 2.2: Temporizzazione

Freq. orologio : $f_c = 100 \text{ KHz}$ $V_{in} = 2 \text{ V}$ $\Rightarrow T_1 = 2 \text{ ms}$ $\Rightarrow t_1 * f_c = \# \text{ conteggi} = 200$

L'accuratezza del sistema viene a dipendere dalla stabilità del segnale di clock. Si ricorre ad uno schema diverso (doppia rampa) per migliorare l'accuratezza.

2.1.2 Conversione a doppia rampa

Si impiega una doppia integrazione : una riferita al segnale di ingresso ed una riferita ad un segnale noto : per confronto si risale alla tensione di misura.

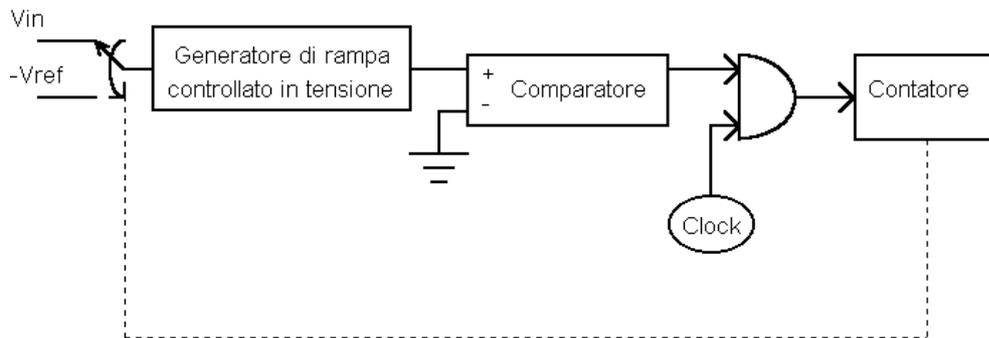


Figura 2.3: Schema di conversione a doppia rampa

La tensione di controllo del generatore di rampa può essere o la tensione in ingresso o una tensione di riferimento. Inizialmente V_{in} controlla la pendenza della rampa, la quale procede finché il contatore arriva a fondoscala. L'interruttore allora commuta e si ha una rampa di segno negativo dovuta a V_{ref} .

Si ricava V_{in} attraverso t_1 e t_2 . (t_1 è determinato dal fondoscala del contatore, t_2 dall'indicazione del comparatore che fissa il valore del contatore - il confronto è fatto con la tensione nulla)

$$V_0 = \frac{V_{in}}{\tau} t_1 = \frac{V_{ref}}{\tau} t_2$$

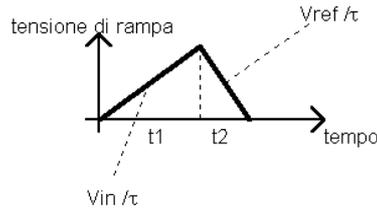


Figura 2.4: Tensione di rampa

$$V_{in} = \frac{t_2}{t_1} V_{ref}$$

$$t_1, t_2 = \# \text{intervalli di clock} \implies \frac{t_2}{t_1} = \frac{N_2}{N_1}$$

$$V_{in} = \frac{N_2}{N_1} V_{ref}$$

La determinazione di V_{in} risulta essere indipendente dalla frequenza di clock (e dalle sue variazioni).

2.1.3 Conversione tensione-frequenza

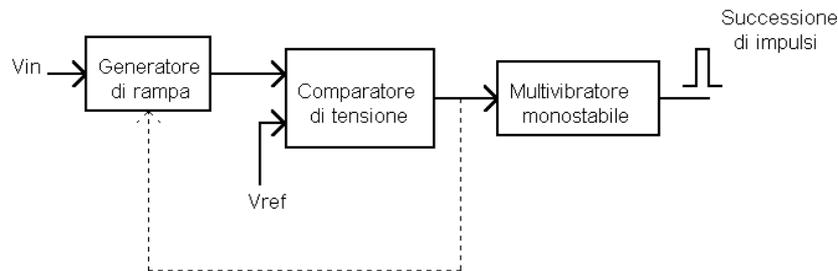


Figura 2.5: Schema di conversione tensione-frequenza

Il comparatore confronta la rampa con la V_{ref} e l'uscita va in un multivibratore; la frequenza degli impulsi è proporzionale alla pendenza della rampa (tempo impiegato dalla rampa per raggiungere V_{ref}) ovvero a V_{in} . L'uscita del comparatore riavverte il generatore di rampa.

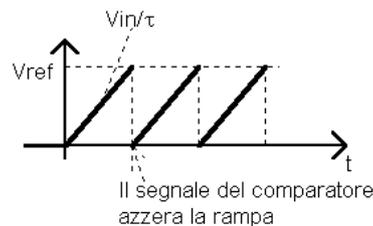


Figura 2.6:

2.1.4 Conversione A/D con rampa a gradini

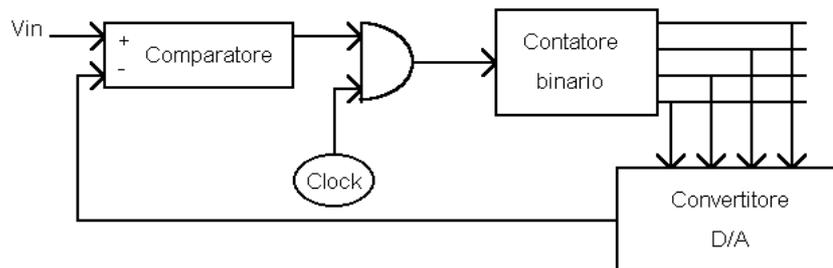


Figura 2.7: Schema di conversione A/D con rampa a gradini

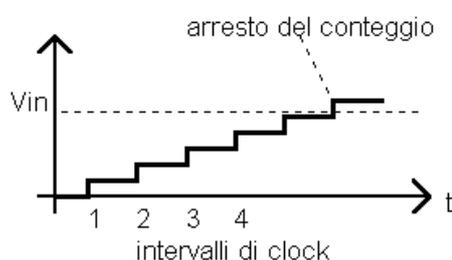


Figura 2.8:

Viene generata una rampa a gradini che si interrompe quando questa supera il valore della tensione di ingresso.

Questi schemi hanno l'inconveniente che la durata della misura dipende dalla V_{in} ; per effettuare misure in tempi prefissati, come talvolta richiesto, si introduce una logica di controllo più complessa, come nel caso seguente:

2.1.5 Conversione A/D per successive approssimazioni

Il confronto avviene con la lettura di metà fondoscala. Se tale confronto è negativo si scende con il valore di tensione e il confronto è fatto con una tensione ridotta di un valore binario (viene alterata ad ogni passo una cifra binaria a partire da quella più significativa).

Tempo di lettura = $\frac{n}{f}$ (N=n bit registro, f=frequenza di clock)

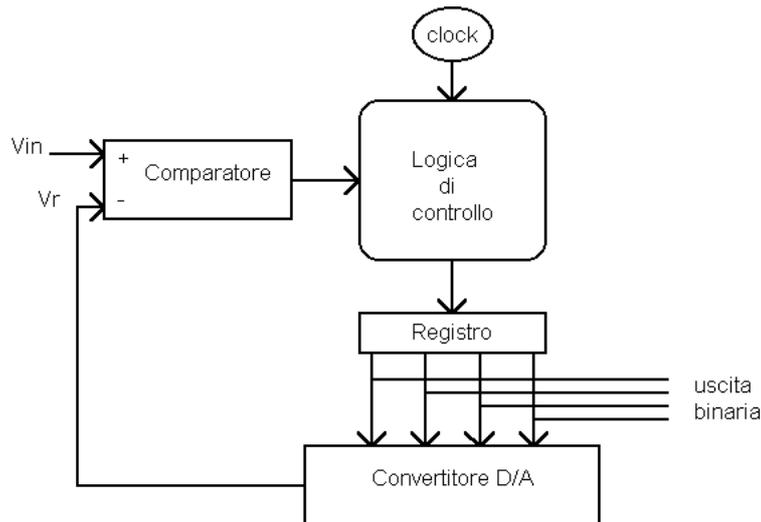


Figura 2.9: Schema di conversione A/D per successive approssimazioni

Esempio

Analizziamo nel dettaglio la successione dei passi di conversione nel caso in cui il registro sia a quattro bit:



Figura 2.10: Esempio

La configurazione definitiva del registro, che indica la misura voluta, è 0001. Se avessimo avuto un ulteriore bit di precisione, avremmo effettuato ancora un confronto (tra 00011 e V_{in}) decidendo se confermare o meno l'ultimo bit al valore 1.

Per misure in alternata possiamo introdurre schemi di raddrizzamento ed analizzare V_{rms} , V_{medio} o V_{picco} riutilizzando questi schemi.

2.2 Tensioni AC : misura della tensione di picco

Si raddrizza la tensione, dopodichè si carica un condensatore alla tensione di picco.

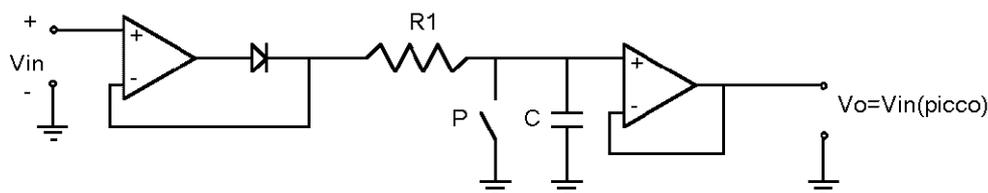


Figura 2.11: Misura della tensione di picco

Il primo operazionale carica il condensatore alla tensione di picco V_{in} ; il secondo permette la lettura della tensione di picco senza scaricare il condensatore. R_1 è inserita per evitare oscillazioni del sistema. L'interruttore a pulsante P permette di resettare il sistema (scarica C) prima di una nuova valutazione di V_{in} .

Analizziamo la misura sul valore quadratico mediante confronto tra la grandezza AC ed una corrispondente misura DC.

2.3 Tensioni AC : misura di rms

Un modo possibile è quello di analizzare gli effetti termici delle due tensioni e confrontarli impiegando, come sensori di temperatura, due diodi. Si uguaglia la temperatura dei due diodi (determinata proprio dal V_{rms} della tensione AC). La misura di tensione viene ricondotta dunque alla misura della "tensione equivalente dc".

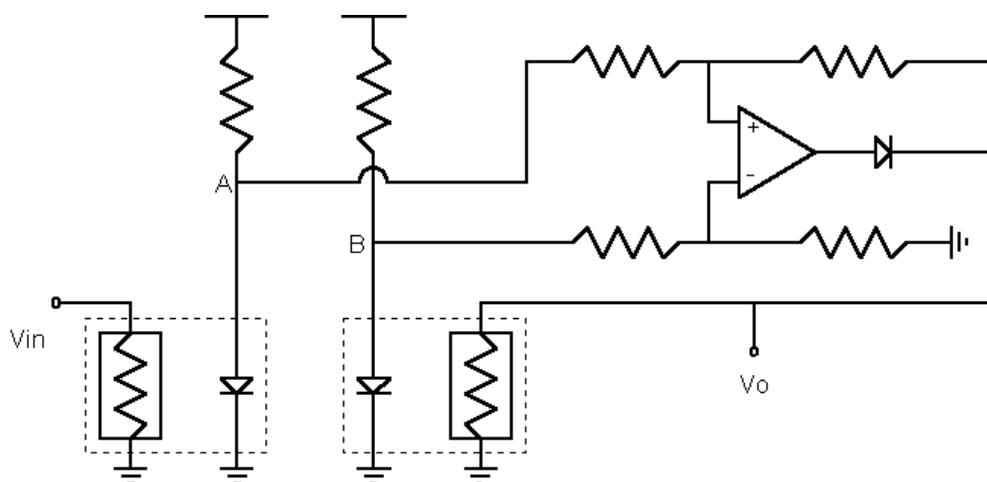


Figura 2.12: Misura di rms

La temperatura del diodo a sinistra è determinata da quella della resistenza pilotata da V_{in} (i diodi sono opportunamente polarizzati). Se i due diodi sono alla stessa temperatura i due punti A e B sono allo stesso potenziale, ed è proprio la differenza di potenziale tra A e B che va a pilotare V_o . Quando $V(A)=V(B)$ $V_o = V_{rms}$ (stesso effetto riscaldante); V_o può essere valutata mediante un volmetro in corrente continua.

Capitolo 3

Oscilloscopi

Consideriamo la struttura dello strumento (*f.17 fig.11-1*).

(CRT = Cathode Ray Tube)

L'oscilloscopio da una rappresentazione luminosa su uno schermo di un diagramma XY bidimensionale. Tipicamente il segnale orizzontale è il tempo e quello verticale un segnale di cui si vuole studiare l'evoluzione; *in fig. 11-2 f.18 si vede la combinazione del segnale temporale e del segnale di ingresso.*

3.1 CRT

(*f.17 fig.9.1*) Possiamo distinguere 5 regioni : la prima regione è responsabile della generazione del fascio elettronico, segue una regione di focalizzazione (focusing), una regione di deflessione, poi di post-accelerazione, ed infine lo schermo.

1. La generazione del fascio elettronico comprende una struttura a triodo : c'è un catodo, una griglia ed un anodo. Il catodo è dotato di un filamento riscaldatore, tale che il materiale del catodo stesso (un ossido metallico) emetta elettroni per effetto termoionico. Questi elettroni vengono accelerati dall'anodo per avere un fascio elettronico con energia sufficiente a dar luogo ad effetti luminosi. La tensione di accelerazione è nell'ordine di 2kV. La griglia regola l'intensità del fascio ed ha potenziale inferiore a quello di catodo.
2. L'anodo è indicato con A1 : è forato per lasciar passare gli elettroni. Il fascio subisce una focalizzazione tramite le cosiddette *lenti elettrostatiche*, che hanno lo scopo di ridurre la divergenza del fascio, rendendo più nitido il punto sullo schermo.
3. La deflessione è verticale ed orizzontale. Nel nostro caso è realizzata con un campo elettrostatico tra due coppie di piastre di deflessione. Con riferimento alla *fig.5 f.19* analizziamo la deflessione verticale. Il fascio entra con una velocità v_p che dipende dal potenziale di anodo :

$$\frac{1}{2}mv_p^2 = (\text{energia cinetica}) = qV_{\text{accelerazione}} \implies v_p = \sqrt{\frac{2qV_a}{m}}$$

Se è presente un campo elettrico gli elettroni ricevono un'accelerazione in senso perpendicolare

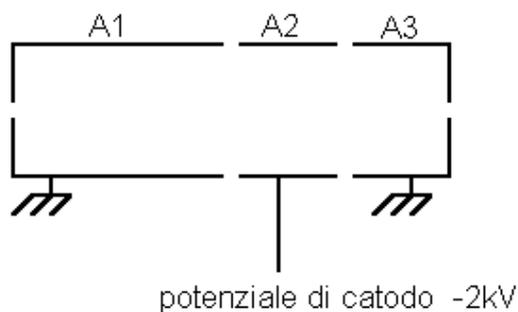


Figura 3.1:

al fascio: la componente orizzontale della velocità resta costante.

$$\vec{v} = \vec{v}_{orizzontale} + \vec{v}_{verticale} = \vec{v}_p + \vec{v}_d \quad \vec{v}_d = at$$

L'elettrone ha un moto parabolico tra le placche, per poi proseguire con un moto rettilineo.

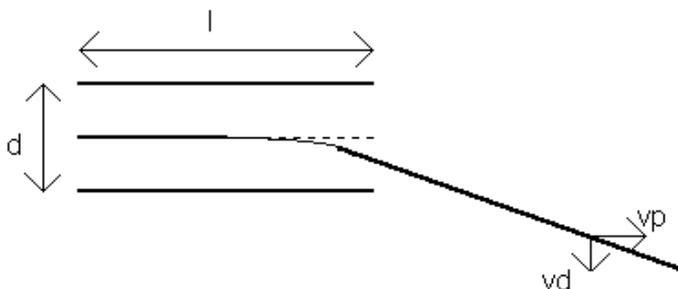


Figura 3.2:

$v_d = at_d$; t_d è il tempo di deflessione, il tempo che l'elettrone ha impiegato a passare tra le placche.

$$t_d = \frac{l}{v_p}$$

L'accelerazione è $\frac{F}{m}$; $a = \frac{qE}{m}$ $E = \frac{V_d}{d}$.

$$\Rightarrow a = \frac{qV_d}{md} \quad V_d \text{ potenziale di deflessione}$$

d_s = deflessione del fascio sullo schermo.

La traiettoria rettilinea è tangente alla parabola nel punto di uscita delle placche; tale tangente tocca l'asse verticale ad $\frac{l}{2}$.

$$\frac{v_d}{v_p} = \frac{d_s}{l_s} \quad v_d = \frac{qV_d}{md} \frac{l}{v_p}$$

$$\Rightarrow d_s = l_s \frac{qV_d}{md} \frac{l}{v_p^2}$$

$$\Rightarrow d_s = l_s \frac{l}{2d} \frac{V_d}{V_a}$$

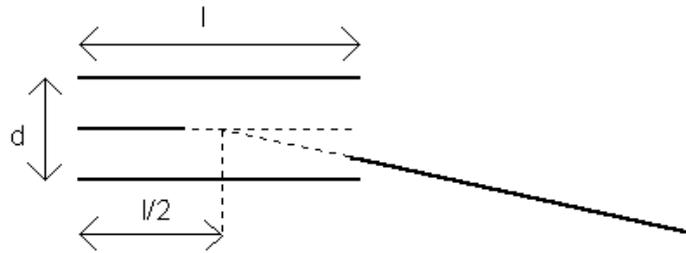


Figura 3.3:

Siamo interessati ad avere deflessioni grandi a parità di segnale, quindi possiamo definire la *sensibilità alla deflessione* come

$$\frac{d_s}{V_d} = \frac{1}{2} l_s \frac{l}{d} \frac{1}{V_a}$$

Essa è tanto maggiore quanto più lungo è il tubo (l_s), quanto maggiore è il rapporto l/d delle placche (che però da un problema di angolo di scansione, che risulta ridotto al crescere di l/d); V_a piccolo aumenta la sensibilità ma rischia di rendere insufficiente la luminosità sullo schermo.

4. La regione di post-accelerazione viene incontro a quest'ultimo problema, rendendo più intenso il fascio elettronico.

f.18 fig.11.5 Sono mostrate diverse strutture possibili per ciò che riguarda l'accelerazione : nella prima il fascio viene accelerato una sola volta; nella seconda si nota l'inserimento di una spirale resistiva che fa sì che le equipotenziali siano perpendicolari all'asse del tubo - V_p è il potenziale di post-accelerazione - Il campo tende a far convergere il fascio sullo schermo riducendo la deflessione; le ultime due figure rappresentano due schemi che impiegano una griglia per aumentare la deflessione sagomando opportunamente le equipotenziali.

5. Sullo schermo è depositato un materiale luminescente (questo termine indica la generazione luminosa di origine non termica). Si parla di **fluorescenza** : luce emessa durante l'eccitazione da parte del fascio elettronico. **Fosforescenza** : luce emessa dopo l'eccitazione. *Nella tabella 11-1, f.19 sono indicati diversi tipi di fosfori, i colori della fluorescenza e della fosforescenza (che possono differire tra loro in uno stesso materiale) e la persistenza (nell'ordine del secondo-secondo) ossia il tempo perchè la luce scenda al 10%* *Manca in questa tabella la sensibilità del fosforo; fosfori che rispondono brevemente sono solitamente anche poco sensibili.* Gli elettroni, arrivati sullo schermo, lo caricerebbero negativamente senza il fenomeno dell'emissione secondaria. L'emissione secondaria può essere inferiore o superiore all'emissione eccitante. *(f.19, fig.17 : misura dell'emissione secondaria : emissione propria del materiale eccitato dal fascio).* La fascia conduttrice (aquadag - grafite, carbone conduttore) raccoglie gli elettroni secondari e chiude il circuito; un'altra possibilità è quella di disporre sullo schermo un sottile film di alluminio che 1) raccoglie gli elettroni, 2) riflette la radiazione emessa dal fosforo, verso l'osservatore, 3) raffredda termicamente lo schermo. Tutto ciò presuppone che l'energia abbinata agli elettroni sia tale da superare l'alluminio. *f.18 fig.11.7, vantaggio del film di alluminio : luminosità.*

Nota : deflessione magnetica. Si possono impiegare circuiti magnetici di deflessione per avere deflessioni maggiori e tubi più corti; la sensibilità è migliore ma la banda in frequenza è inferiore (20kHz).

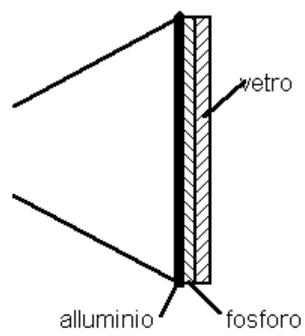


Figura 3.4:

Capitolo 4

Metodi di confronto per la misura R,L,C

4.1 Misura di resistenze : ponte di Wheatstone

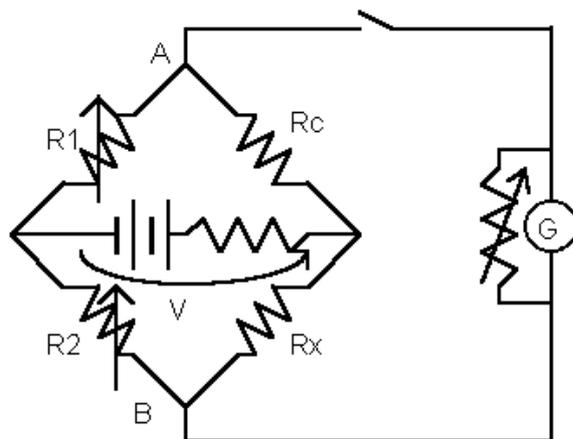


Figura 4.1: Ponte di Wheatstone

Il circuito viene alimentato su una diagonale e si osserva la tensione sull'altra diagonale. R_c è fissa, R_x ignota. Condizione di equilibrio :

$$V_{AB} = 0$$

Quando $I_G = 0$ si ha che

$$V_A - V_B = V \frac{R_c}{R_1 + R_c} - V \frac{R_x}{R_2 + R_x}$$

La condizione di equilibrio corrisponde a

$$\frac{R_c}{R_1 + R_c} = \frac{R_x}{R_2 + R_x}$$

cioè

$$R_x = \frac{R_2}{R_1} R_c$$

Valori tipici sono

- $1 \Omega < R_c < 10^4 \Omega$
- $1 \Omega < R_1, R_2 < 10^3 \Omega$
- $10^{-3} \Omega < R_x < 10^7 \Omega$ con una precisione intorno a 10^{-4}

Questa tecnica è molto accurata (più dell'ohmetro che abbiamo già incontrato). Considerazioni sulla sensibilità del sistema nelle varie condizioni di lavoro:

$$V_{AB} = V \left[\frac{R_c}{R_1 + R_c} - \frac{R_x}{R_2 + R_x} \right]$$

Variando la sola R_x :

$$\partial V_{AB} = V(-1) \frac{R_2 + R_x - R_x}{(R_2 + R_x)^2} \partial R_x = -V \frac{R_2}{(R_2 + R_x)^2} \partial R_x$$

$$\frac{\text{partial} V_{AB}}{V} = -\frac{k}{(1+k)^2} \partial R_x R_x, \text{ con } k = \frac{R_2}{R_x}$$

Data una variazione relativa su R_x vediamo come si riflette sulla tensione tra A e B che eccita il galvanometro. Viceversa, stimata la più piccola V_{ab} , sappiamo la variazione relativa su R_x . Più grande è V più piccola è l'incertezza su R_x . Il termine $\frac{k}{(1+k)^2}$ deve essere più grande possibile, per lo stesso motivo di incertezza:

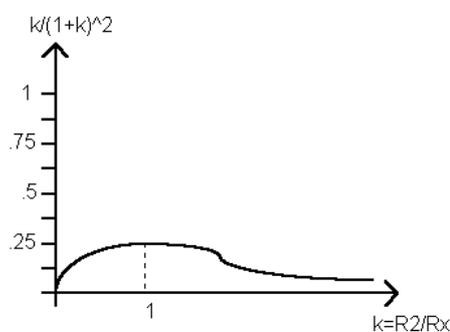


Figura 4.2: Grafico

R_2 deve essere, se possibile, dello stesso ordine di grandezza di R_x .

4.2 Misura a ponte di piccole resistenze *

La resistenza da misurare ha quattro morsetti, due amperometrici - connessi al circuito, di grosse dimensioni e in grado di assicurare un buon collegamento - ; due volmetrici - ai capi dei quali si osserva la differenza di potenziale, sono piccoli e permettono di individuare con precisione il valore della R .



Figura 4.3:

Metodo del doppio ponte :

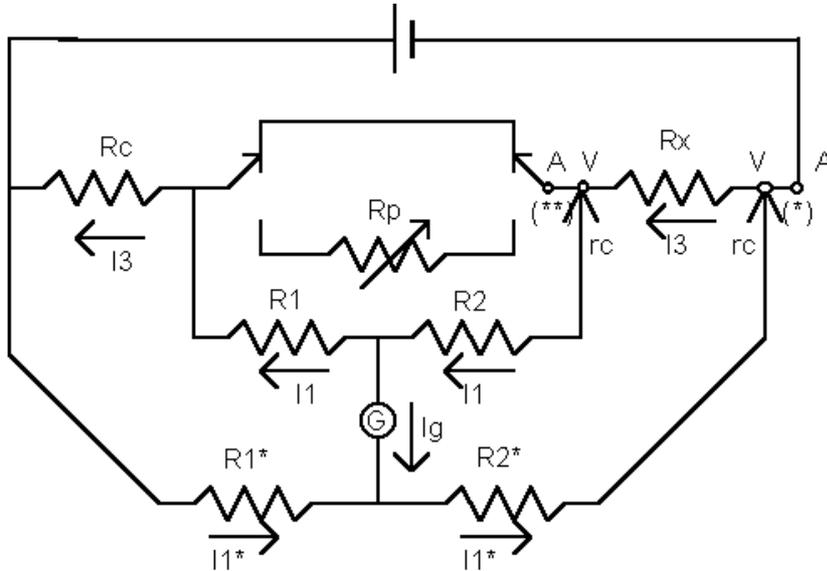


Figura 4.4: Metodo del doppio ponte (correnti per $I_g = 0$)

Siamo nella situazione di equilibrio quando la corrente indicata dal galvanometro è nulla. R_1, R_2, R_1^*, R_2^* sono in un rapporto fisso fra loro :

$$\frac{R_1}{R_1^*} = \frac{R_2}{R_2^*} = m$$

$$\begin{aligned} I_1^* R_1^* &= I_3 R_c + I_1 R_1 \\ I_1^* R_2^* &= I_3 R_x + I_1 R_2 \\ \Rightarrow \frac{I_3 R_c}{I_3 R_x} &= \frac{I_1^* R_1^* - I_1 R_1}{I_1^* R_2^* - I_1 R_2} \\ \Rightarrow \frac{R_c}{R_x} &= \frac{I_1^* R_1^* - I_1 m R_1^*}{I_1^* R_2^* - I_1 m R_2^*} = \frac{(I_1^* - I_1 m) R_1^*}{(I_1^* - I_1 m) R_2^*} = \frac{R_1}{R_2} \\ \Rightarrow R_x &= \frac{R_2 R_c}{R_1} \text{ per } I_G = 0, \quad \frac{R_1}{R_1^*} = \frac{R_2}{R_2^*} = m \end{aligned}$$

L'espressione è quella del ponte semplice.

- Le resistenze ai contatti voltmetrici, resistenze di contatto r_c , sono in serie ad R_2 e R_2^* che sono grandi, quindi le resistenze di contatto non hanno rilevanza.
- Un'eventuale resistenza su ciascun contatto amperometrico non ha influenza ai fini della misura in quanto esterna è al circuito del ponte

o non rientra nelle equazioni del ponte :

(*) è esterna al ponte

(**) non ha influenza sull'equilibrio.

Lo si verifica variando R_p (se il ponte era equilibrato, lo resta anche introducendo una caduta su R_p). Tutto ciò è vero se $\frac{R_1}{R_1^*} = \frac{R_2}{R_2^*} = m$. In questo modo misuriamo correttamente resistenze di piccolo valore. Si può verificare che, in generale, la condizione di equilibrio corrisponde a :

$$R_x = \frac{R_2 R_c}{R_1} + \frac{R_p (R_2^* R_1 - R_2 R_1^*)}{R_1^* (R_1 + R_2 + R_p)}$$

(Il secondo termine è forzato ad essere nullo con l'opportuno rapporto di resistenze del ponte).

4.3 Misure di resistenze di grande valore

(Per resistenze di grande valore si intende $> 10^{10} \Omega$).

Si osserva il transitorio di tensione ai capi della resistenza, e si risale al suo valore della costante di tempo dello scarico della capacità.

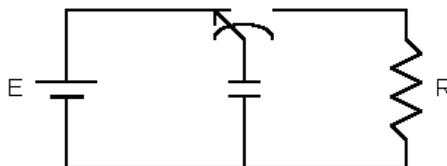


Figura 4.5:

Bisogna stare attenti alle correnti parassite sulla superficie del resistore.

Nel caso in cui la misura sia di tipo stazionario e non dinamico:

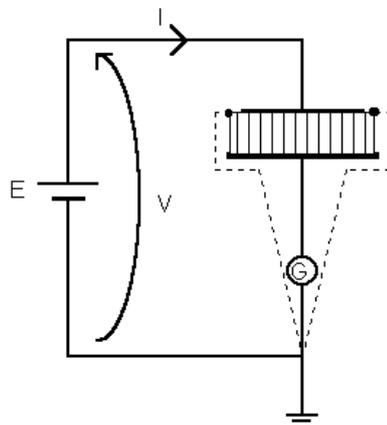


Figura 4.6: Misura di tipo stazionario

Si dispongono, a contatto del materiale (che ha elevata resistività), non dell'elettrodo, un anello di guardia che porta a massa le correnti superficiali parassite.

4.4 Misure di capacità

Lo schema a ponte può essere usato per la misura di elementi reattivi:

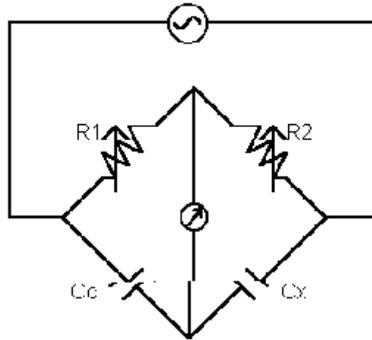


Figura 4.7: Schema a ponte per la misura di elementi reattivi

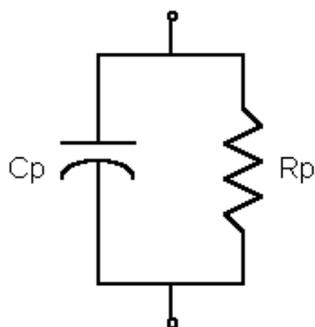
Condizione di equilibrio (stesso ragionamento sul partitore) :

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{Z_c}{Z_x} = \frac{\frac{1}{j\omega C_c}}{\frac{1}{j\omega C_x}} = \frac{C_x}{C_c}$$

$$C_x = C_c \frac{R_1}{R_2} \text{ (modellando il condensatore come pura capacità)}$$

Dovremo in realtà rappresentare diversamente il condensatore:

- Schema parallelo



Resistenza di perdita

- Schema serie

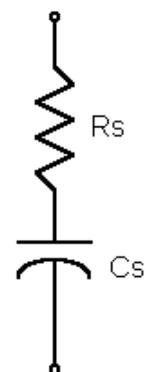


Figura 4.8: Rappresentazione del condensatore : schema serie e schema parallelo

$$C_s = C_p(1 + D^2)$$

$$R_s = R_p \left(\frac{D^2}{1 + D^2} \right)$$

$D = \text{fattore di dissipazione} = \frac{1}{\omega R_p C_p} = \omega R_s C_s$

I due schemi sono equivalenti. Schema parallelo \rightarrow usato per perdite grandi. Schema serie \rightarrow preferito in caso di piccole perdite.

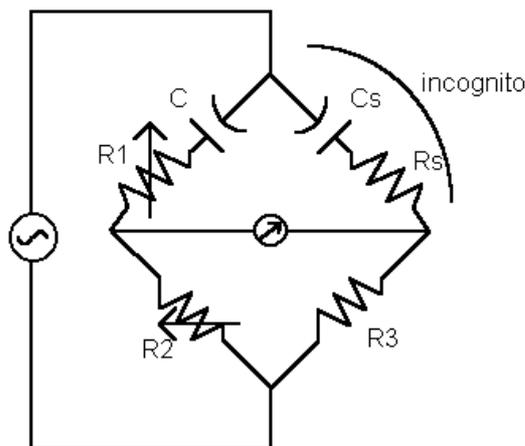


Figura 4.9:

Condizione di equilibrio :

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_s}{Z_3}$$

$$C_s = C_1 \frac{R_2}{R_3} , \quad R_s = R_1 \frac{R_3}{R_2} , \quad D = \omega R_s C_s = \omega R_1 C_1$$

em Nota : in un circuito a ponte la posizione del generatore e del galvanometro-voltmetro (in questo caso voltmetro per alternata) sono intercambiabili. $\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_c}{R_x} \iff R_1 R_c = R_2 R_x$ così come $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_s}{Z_3} \iff \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_2}{Z_3}$.

La scelta può essere fatta sulla base del maggiore trasferimento di potenza sullo strumento (per avere più segnale e maggiore sensibilità).

L'altro schema (con connessione parallelo) è il seguente :

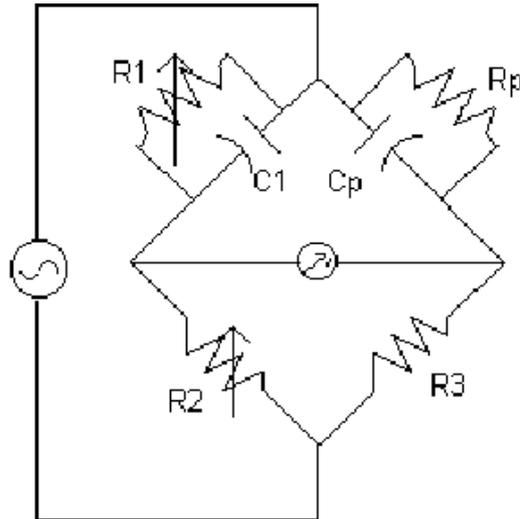


Figura 4.10: Schema con connessione parallelo

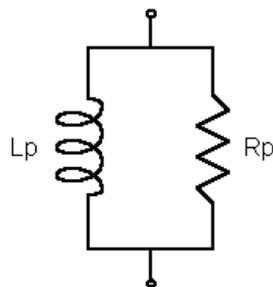
Condizione di equilibrio :

$$C_p = C_1 \frac{R_2}{R_3} , \quad R_p = R_1 \frac{R_3}{R_2} , \quad D = \frac{1}{\omega R_p C_p} = \frac{1}{\omega R_1 C_1}$$

4.5 Ponti per induttanze

Consideriamo anche in questo caso uno schema equivalente serie ed uno schema equivalente parallelo.

- Schema parallelo



- Schema serie

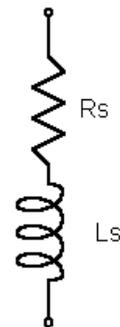


Figura 4.11: Rappresentazione dell'induttanza : schema serie e schema parallelo

Definiamo un fattore di qualità per l'induttanza (*Q-factor*):

$$Q = \frac{X_s}{R_s} = \frac{\omega L_s}{R_s} = \frac{\text{reattanza serie}}{\text{resistenza serie}}$$

Maggiore è il fattore Q migliore è l'induttore (minore resistenza serie); il fattore Q dipende dalla frequenza ed è fissato per fissata (*). Possiamo esprimere i fattori del modello parallelo in funzione di

quelli relativi al modello serie :

$$L_p = L_s \left(1 + \frac{1}{Q^2} \right) , \quad R_p = R_s (1 + Q^2)$$

(*) Nota : Induttore

Per descrivere l'oggetto induttore in un campo di frequenza sufficientemente ampio si ricorre ad uno schema più accurato, come ad esempio il seguente:

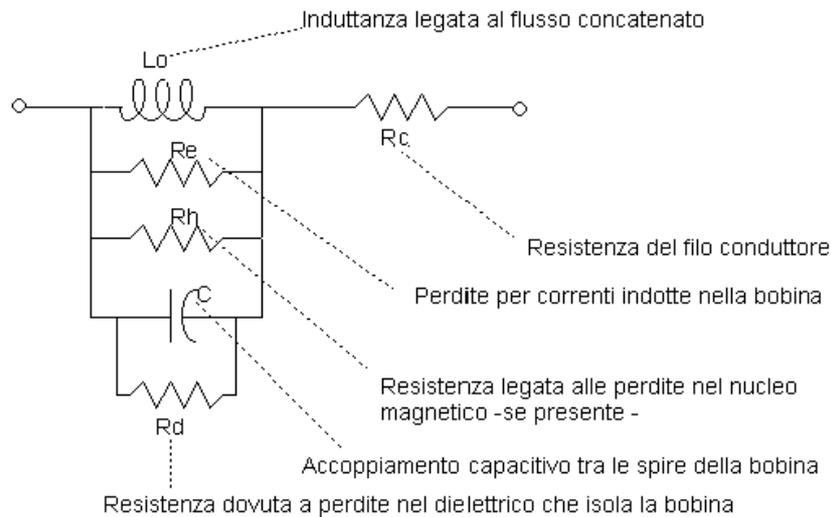


Figura 4.12: Schema più accurato dell'induttore

Queste quantità dipendono, in generale, dalla pulsazione.

Vediamo ora alcuni schemi a ponte per la misura di induttanze.

4.6 Ponte di Maxwell-Wien

(Per fattori di qualità relativamente bassi $Q = 1 - 10$)

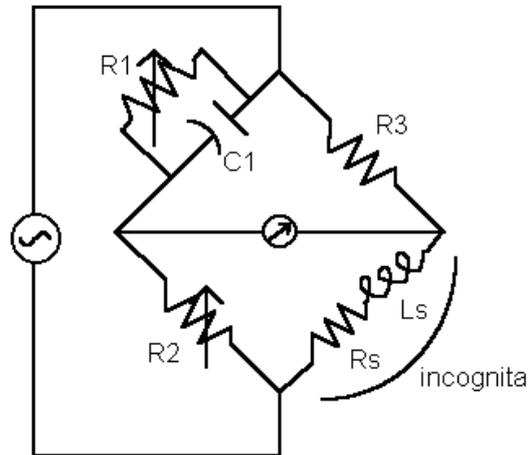


Figura 4.13: Ponte di Maxwell-Wien

Il confronto viene fatto con un condensatore perchè le sue proprietà sono caratterizzabili meglio di quelle di un induttore. Per valori di Q che superano 10 usiamo il **Ponte di Hay** :

(per Q elevato conviene lavorare con uno schema serie)

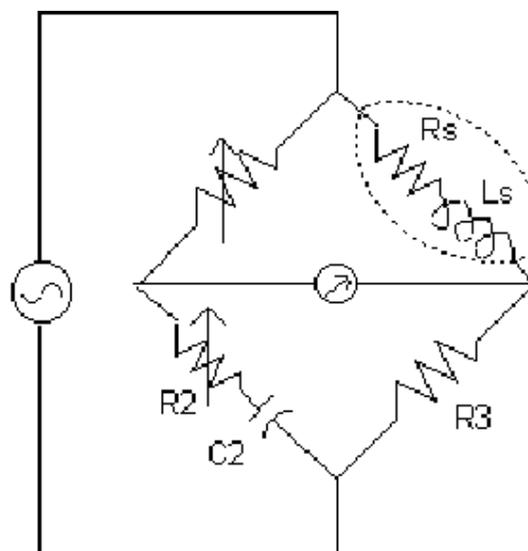


Figura 4.14: Ponte di Hay

In questo schema la condizione di equilibrio dipende dalla pulsazione con la quale eccitiamo il ponte.

$$L_s = \frac{C_2 R_3 R_1}{1 + (\omega C_2 R_2)^2} \quad R_s = \frac{(\omega C_2)^2 R_1 R_2 R_3}{1 + (\omega C_2 R_2)^2}$$

Se scegliamo di fare il confronto con un induttore di riferimento, possiamo avere una relazione indipendente dalla pulsazione.

4.7 Schema a confronto di induttori

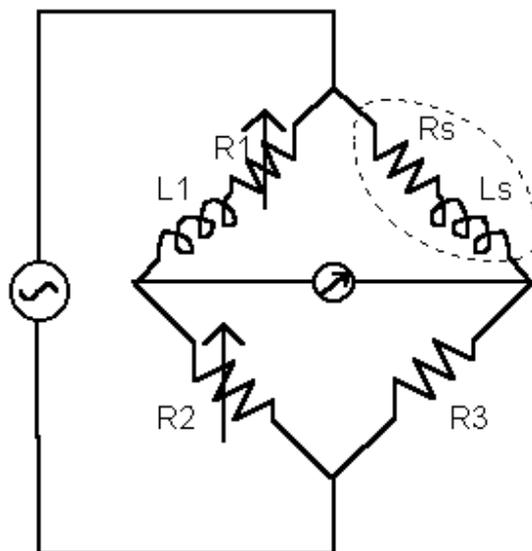


Figura 4.15: Schema a confronto di induttori

$$L_s = L_1 \frac{R_3}{R_2} \quad , \quad R_s = R_1 \frac{R_3}{R_2}$$

- Possiamo inquadrare questo discorso in uno schema che consenta una classificazione sui circuiti a ponte (v. fotocopia 8 : è presentata una rassegna di alcuni tipi di circuiti a ponte; non sono indicati l'inserzione del volmetro e quella del generatore perchè i due strumenti possono essere scambiati).

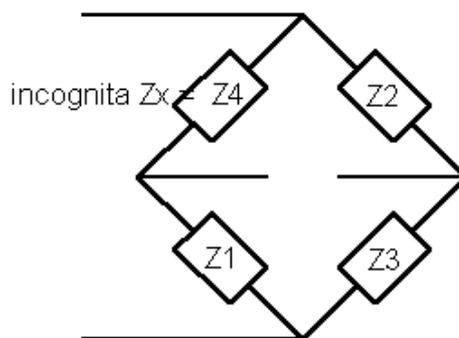


Figura 4.16:

Condizione di equilibrio :

$$\frac{Z_4}{Z_1} = \frac{Z_2}{Z_3}$$

$$Z_x = Z_1 \frac{Z_2}{Z_3} \text{ oppure } Z_1 Z_2 \frac{1}{Z_3} = Z_1 Z_2 Y_3$$

queste uguaglianze individuano diverse *interpretazioni* :

- La scrittura *diretta* $Z_x = Z_1 \frac{Z_2}{Z_3}$ suggerisce che il confronto avvenga con Z_1 e che Z_2 e Z_3 individuino solo la proporzione tra Z_x e Z_1 : confronto $Z_x - Z_1$. Manteniamo $\frac{Z_2}{Z_3}$ Reale.
- La scrittura *inversa* $Z_x = Z_1 Z_2 Y_3$, con $Z_1 Z_2$ Reale, mette in corrispondenza un'impedenza con un'ammettenza : il confronto produce una relazione così fatta :

$$R_x = (R_1 R_2) G_3$$

$$L_x = (R_1 R_2) C_3 \text{ (Questo accadeva nel Ponte di Maxwell, con la relazione } L_s - C_1.)$$

4.8 Rappresentazione dell'incognita nei ponti serie e parallelo

4.8.1 Circuiti ponte serie

- Uno dei due rami adiacenti al ramo incognito è una combinazione serie (*)

$$Z_x = R_x + jX_x = Z_1 \frac{Z_2}{Z_3} = (R_1 + jX_1) \frac{Z_2}{Z_3}$$

- Il ramo opposto a quello incognito è una combinazione parallela

$$R_x + jX_x = (G_3 + jB_3) Z_1 Z_2$$

4.8.2 Circuiti ponte parallelo

- Uno dei due rami adiacenti al ramo incognito è una combinazione parallela

$$Z_x = Z_1 \frac{Z_2}{Z_3} \rightarrow Y_x = Y_1 \frac{Y_2}{Y_3} \rightarrow G_x + jB_x = (G_1 + jB_1) \frac{Y_2}{Y_3}$$

- Il ramo opposto a quello incognito è una combinazione serie (**)

$$Y_x = G_x + jB_x = Y_1 \frac{Y_2}{Y_3} = Z_3 Y_1 Y_2 = (R_3 + jX_3) Y_1 Y_2$$

Utilizziamo questa classificazione per scegliere una configurazione (*) oppure (**) per l'impedenza incognita.

Un'ulteriore classificazione riguarda dove collocare gli elementi variabili (tipicamente sono due).

4.9 Posizione degli elementi variabili

(ha importanza anche per stabilire quella che è la grandezza indicata dallo strumento di misura) Gli elementi variabili possono essere (li indico con l'accento circonflesso)

1. Sullo stesso ramo, es. :

$$R_x + j\omega L_x = (\hat{G}_3 + j\omega\hat{C}_3)R_1R_2$$

Il valore degli elementi permette di variare il valore della R_x e della L_x .

2. Su rami diversi, es. :

$$R_x + j\omega L_x = (\hat{G}_3 + j\omega C_3)\hat{R}_1R_2$$

In questa situazione $L_x = C_3\hat{R}_1R_2$ e $R_x = \hat{G}_3\hat{R}_1R_2$, quindi il valore di R_x dipende da entrambi gli elementi variabili; il fattore Q è $\frac{\omega L_x}{R_x} = Q = \omega C_3\hat{R}_3$. Con questo strumento noi otteniamo direttamente l'induttanza ed il fattore Q , legate univocamente ad un solo elemento variabile. L'uscita del ponte è costituita perciò da L_x e Q , in quanto le (eventuali) "manopole" di regolazione possono essere indicate proprio come "induttanza" e "fattore Q ", mentre il termine R_x è ricavabile indirettamente.

3. Elemento variabile sul ramo incognito (tecnica di sostituzione), es. :

$$(R_x + j\omega L_x + R_y) = R_1R_2(G_3 + j\omega C_3)$$

$$R_x = R_1R_2G_3 - R_y \quad , \quad L_x = R_1R_2C_3$$

Quindi le uscite sono R_x e L_x .

4.10 Sorgenti di errore

Possiamo formulare la situazione di equilibrio definendo la corrente nel ramo rivelatore come una funzione dei parametri circuitali e della grandezza incognita:

$$I = f(a, b, c, \dots, x)$$

dove a, b, c, \dots sono parametri ed x è l'incognita (f è un'ammettenza).

La condizione di equilibrio $I = 0$ è data dunque da $f = 0$. $F(a, b, c, \dots, x) = 0$ definisce implicitamente la $x = x(a, b, c, \dots)$.

- Sperimentalmente $|I| < I_{min}$ (sensibilità dello strumento rivelatore)

$$|f(a, b, c, \dots, x)| < \frac{I_{min}}{V} = \varepsilon$$

Questo comporta che, se noi espandiamo f in serie di Taylor del primo ordine,

$$f(a, b, c, \dots, x) \cong f(a, b, c, \dots, x_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x - x_0)$$

(Con X_0 tale che $f(a, b, c, \dots, x_0) = 0$)

$$\left| \Delta x \frac{\partial f}{\partial x, x_0} \right| < \varepsilon \quad |\Delta x| < \frac{\varepsilon}{\left| \Delta x \frac{\partial f}{\partial x, x_0} \right|}$$

Dove ε è la sensibilità dello strumento; Δx è l'incertezza sul valore dell'impedenza incognita.

$\left| \Delta x \frac{\partial f}{\partial x, x_0} \right|$ rappresenta l'influenza dell'impedenza incognita sulla corrente del rivelatore.

- Incertezze sui valori dei parametri a, b, c, ...
- Effetti di parametri circuitali parassiti di cui non si è esplicitamente tenuto conto nelle f.

4.11 Misura di L e C con tecniche digitali

(Alimentiamo l'induttanza e la capacità con correnti di valore noto in funzione di una tensione di ingresso, per cui dal rapporto tra la fase del segnale e la fase dell'ingresso si risale alla grandezza incognita)

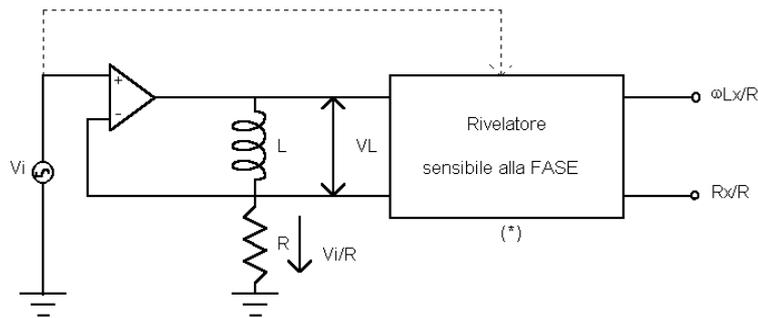


Figura 4.17: Misura di L con tecniche digitali

$$V_i = \frac{V_i}{R} (R_x + j\omega L_x) \quad \{Z(L) \rightarrow R_x + j\omega L_x\}$$

(*) Ci dà la componente in quadratura ed in fase rispetto alla V_i ; noi misuriamo dunque la parte reattiva e quella resistiva dell'induttanza.

Con uno schema simile si può realizzare una misura di capacità:

Corrente che attraversa la capacità :

$$V_i (G_x + j\omega C_x)$$

$$V_R = RI = V_i R (G_x + j\omega C_x)$$

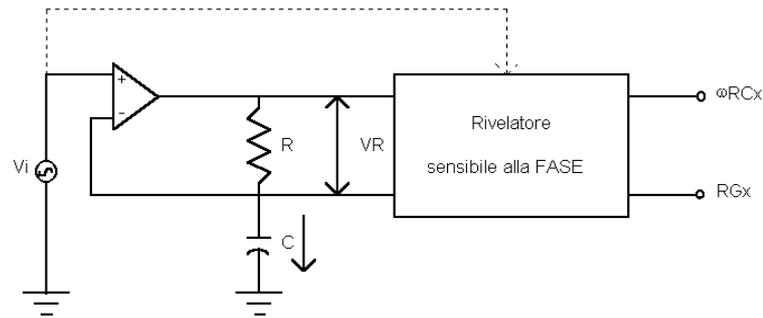


Figura 4.18: Schema a confronto di induttori

4.12 Misure di L in alta frequenza

4.12.1 Circuiti a risonanza

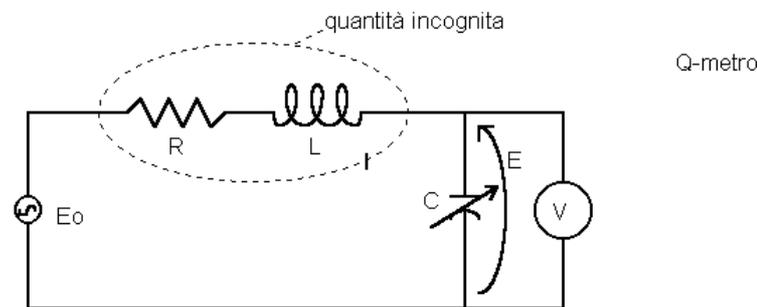


Figura 4.19: Schema a confronto di induttori

Il valore della capacità variabile viene determinato in modo da avere la massima misura sul voltmetro. La condizione di equilibrio del circuito è la **Risonanza** = valore di C per il quale V è massimo.

$$E = E_0 \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$

$$E_{max} \rightarrow \omega L = \frac{1}{\omega C} \quad L = \frac{1}{\omega^2 C}$$

$$\frac{E}{E_0} = \frac{1}{\omega RC} = \left(\frac{\omega L}{R}\right) = Q \implies \text{Fattore di qualità}$$

4.13 Metodi di ponte-*Complementi* **

4.13.1 Principio e schema fondamentale. Modi di impiego con correnti continue

Il principio del ponte fu illustrato dal Wheatstone nel 1843, ma pare che l'idea fosse già stata enunciata dal Christie fin dal 1833.

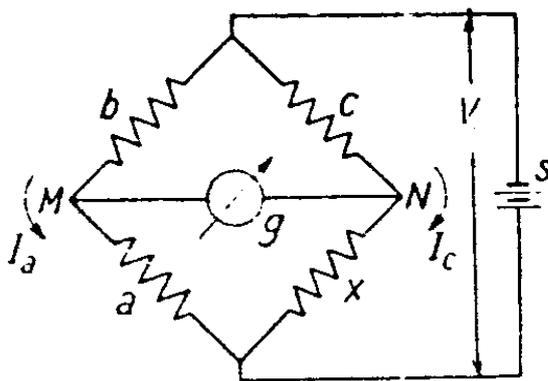


Figura 4.20: Schema di ponte

Rimanendo per ora nel campo delle correnti continue, la figura 4.20, rappresenta lo schema del classico ponte di Wheatstone, il quale può considerarsi formato da un quadrilatero di resistenze di cui le diagonali sono costituite da un galvanometro g e da una sorgente s di f.e.m. (pila o altro). Regolate le resistenze in modo che l'indicazione del galvanometro sia ridotta a zero, i punti M ed N saranno allo stesso potenziale e si potranno scrivere le relazioni:

$$V = (a + b)I_a = (c + x)I_c$$

$$aI_a = xI_c \quad bI_a = cI_c$$

Dividendo l'una per l'altra le ultime due relazioni, si ottiene ancora $\frac{a}{b} = \frac{x}{c}$ ossia $ac = bx$ che si può enunciare dicendo: *all'equilibrio devono essere uguali i prodotti dei lati opposti del ponte*. Note pertanto tre delle quattro resistenze (per esempio a , b , c) si deduce immediatamente la quarta con la relazione:

$$x = \frac{a}{b}c$$

che, sotto tale forma, ci mostra i due modi di impiego pratico del ponte. Si può (figura 4.21) dare a c un valore intero esatto, dello stesso ordine di grandezza della incognita x e ridurre a zero il galvanometro regolando il rapporto $\frac{a}{b}$, in modo tale che i lati costituiscano una ordinaria resistenza potenziometrica. Oppure si può dare (figura 4.22) al rapporto $\frac{a}{b}$ un valore esatto e ridurre a zero il galvanometro regolando la c . È questa la disposizione più usata.

Vedremo più avanti per quali ragioni in pratica i limiti di impiego del ponte vadano generalmente da 1Ω a 100000Ω .

Sotto tale forma il metodo è paragonabile ad una bilancia a piatti di cui si potrà variare la lunghezza dei bracci (figura 4.23). All'equilibrio si ha infatti $ac = bx$. Per analogia i lati a e b si chiamano spesso *bracci del ponte*; mentre l'altro si chiama *lato di paragone*.

4.13.2 Tecniche e accorgimenti di misura

Il circuito deve essere completato con un tasto (interruttore o chiave) su ciascuna delle diagonali di pila e di galvanometro. Si ha che quando la chiave di galvanometro è aperta, il galvanometro rimane

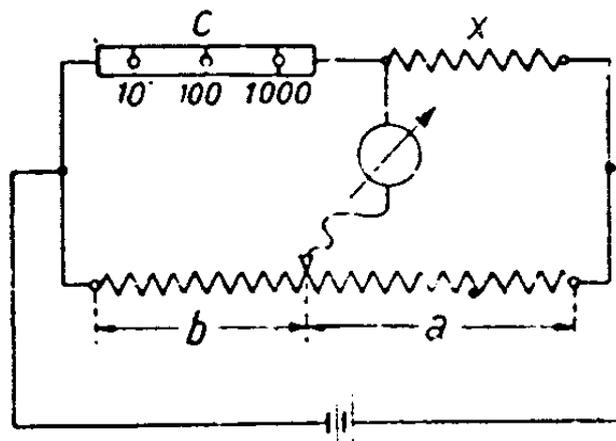


Figura 4.21: Ponte a variazione di rapporto

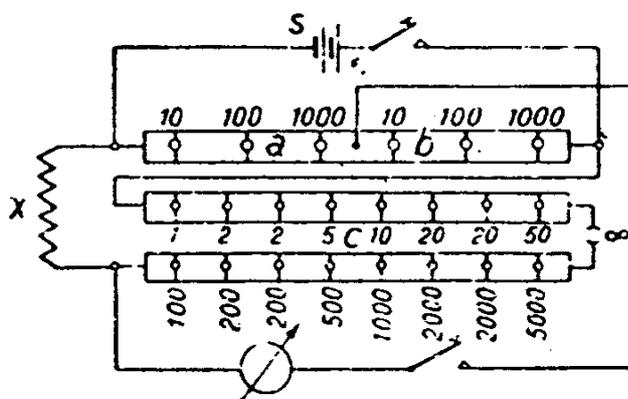


Figura 4.22: Disposizione normale di ponte

a circuito aperto e quindi non é smorzato. Convieni pertanto, nelle misure, chiudere prima la chiave di galvanometro e poi quella di pila. Nei primi tentativi basta dare un colpetto alla chiave di pila per osservare il senso di deviazione del galvanometro. Quando si sono individuati due valori di c per i quali il galvanometro devia in senso contrario, si puó facilmente perfezionare la misura.

Si puó anche, nei primi tentativi, shuntare il galvanometro eliminando però sempre il derivatore (per ovvie ragioni di sensibilità) quando si é prossimi all'equilibrio. In generale, data la grande sensibilità del ponte (nel quale si puó pensare che la corrente nulla nel galvanometro sia data dalla differenza delle due correnti I_1 e I_2 indicate in figura 4.24 con frecce piene e punteggiate), non si troverá in generale un valore esatto di c che dará lo zero. Si dovrá cioè procedere per interpolazione. Detti c e $c + l$ i due valori che comprendono lo zero, e λ_1 e λ_2 le due deviazioni, di senso contrario, lette in corrispondenza, il valore esatto di c sará dato (figura 4.25), da:

$$c = c + l \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

cosicché

$$x = \frac{a}{b} \left(c + \frac{\lambda_1 l}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)$$

Come già si é visto, l'interpolazione stessa consente di determinare sperimentalmente la sensibilità del

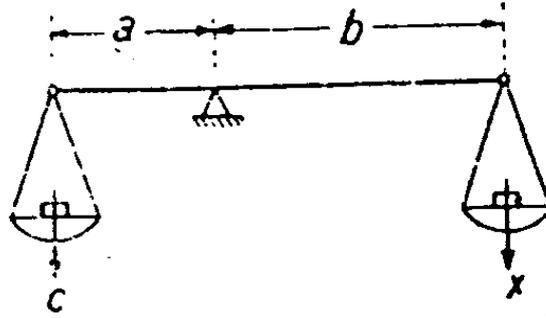


Figura 4.23: Analogo meccanico del ponte

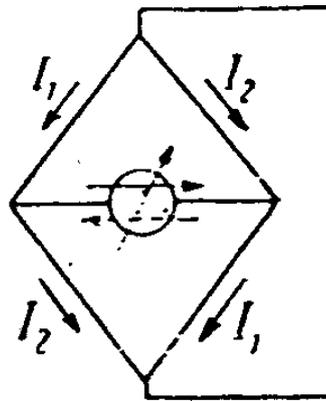


Figura 4.24: Andamento ipotetico delle correnti nel ponte

ponte, che sarà espressa al solito da:

$$\frac{x}{dx} = \frac{\Delta\lambda}{d\lambda} \frac{c}{\Delta c} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{d\lambda l} c$$

essendo generalmente $\Delta c = l$, e $d\lambda = 0.2 \div 0.5$ divisioni.

Come in tutti i metodi di zero, la sensibilità è in generale esuberante; l'errore proprio del metodo è trascurabile, cosicché la precisione con cui sono tarate le resistenze del ponte. Dalla relazione $x = \frac{a}{b}c$, nella peggiore ipotesi risulta:

$$\frac{dx}{x} = \frac{da}{a} + \frac{db}{b} + \frac{dc}{c}$$

Se tutte le resistenze in un ponte sono esatte a $1/10000$, l'errore commesso nella misura di x potrà quindi essere anche di $3/10000$.

4.13.3 Intercambiabilità dei lati opposti e delle diagonali

In un ponte all'equilibrio i lati opposti sono intercambiabili. Infatti la relazione $ac = bx$ è soddisfatta anche se cambiamo di posto la a con la c (figura 4.26, a e b) oppure la b con la x . Di più dalla relazione stessa discendono le due proporzioni $\frac{a}{b} = \frac{x}{c}$ oppure $\frac{a}{x} = \frac{b}{c}$. Come la prima ci dice che se si alimentano i vertici P, Q del ponte, i punti M ed N sono equipotenziali (figura 4.26a); così la seconda dice che, se si

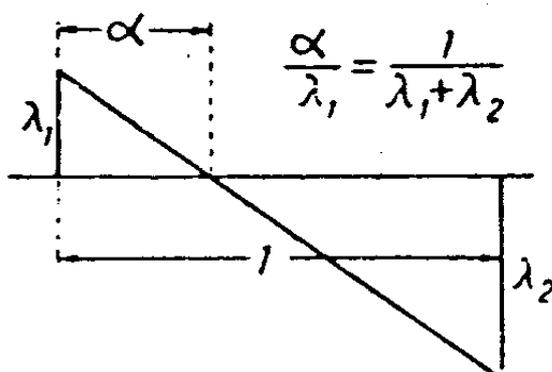


Figura 4.25: Interpolazione

alimentano i vertici M, N (figura 4.26c) risultano equipotenziali i punti P e Q. Questa intercambiabilità della sorgente di f.e.m. col galvanometro ha però delle limitazioni pratiche per intuitive considerazioni di sensibilità.

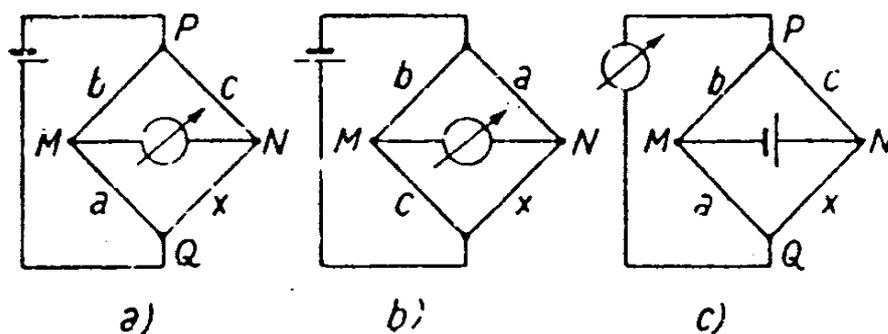


Figura 4.26: Intercambiabilità dei lati

Si può infatti accettare come evidente che la sensibilità di regolazione aumenti con la quota di tensione applicata al lato x di misura. Tuttavia, poiché è il rapporto $\frac{a}{b} = \frac{c}{x} = y$ che si deve individuare, è anche evidente che l'approssimazione con cui esso può determinarsi è massima quando $a = b$. Infatti

$$\frac{dy}{y} = \frac{da}{a} + \frac{db}{b}$$

e, potendosi ritenere uguali gli errori assoluti da e db , come lo sono di fatto nel caso di una resistenza potenziometrica, avremo

$$\frac{dy}{y} = \frac{a+b}{ab} da$$

che, per $a+b$ costante, è minimo per $a = b$. Pertanto il galvanometro deve essere derivato, per quanto è possibile, in vicinanza del punto di mezzo di $a+b$ e di $c+x$. Per conseguenza, quando due lati del ponte, per es. a e x siano piccoli relativamente agli altri due, lo schema a) della figura 4.27 non è consigliabile, perché i punti M ed N si trovano elettricamente vicini al punto Q. Si dovrà in tal caso usare solo lo schema b).

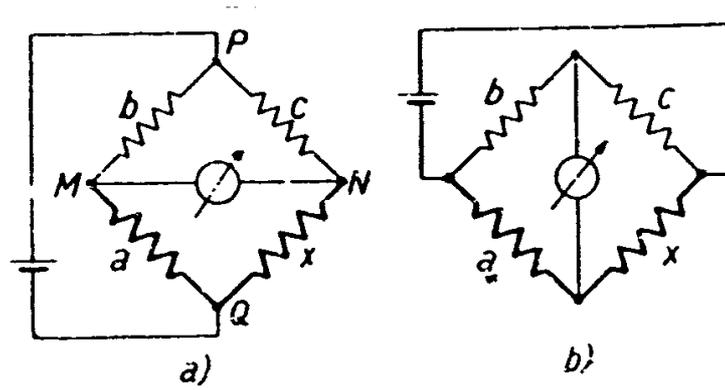


Figura 4.27: Criterio per la scelta della diagonale di pila

Spesso si rendono intercambiabili, mediante un commutatore a spine, i bracci a e b (figura 4.28) in modo da poterli confrontare. In tal caso, eseguendo due volte una misura con $a = b$ e scambiandoli di posto, si realizza lo stesso controllo che si ha nelle bilance, con la *doppia pesata*. Si eliminano così gli errori dovuti alla imprecisione costruttiva dei lati a e b . Ancora più utile è la possibilità, di cui molti ponti sono dotati, di poter rapidamente scambiare di posto pila e galvanometro, in relazione alle considerazioni sopra accennate e sulle quali ritorneremo più ampiamente parlando della sensibilità del ponte.

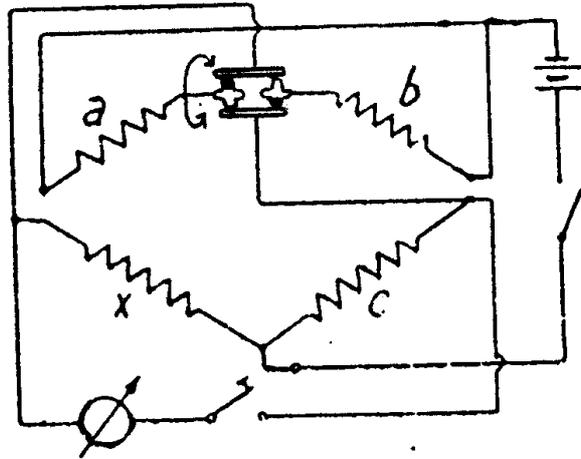


Figura 4.28: Schema per l'intercambiabilità dei bracci

4.13.4 Teoria generale del ponte

Data l'importanza dei metodi di ponte, conviene vederne un po' più a fondo la teoria, che da gran tempo è stata sviluppata in tutti i suoi particolari.

La teoria generale del ponte suppone che in ciascuno dei sei lati di resistenza a, b, c, x, g ed s vi sia una f.e.m. . Dati i valori delle sei resistenze si tratta di trovare il valore delle sei correnti nei sei lati.

Applicando i principi di Kirchoff, si possono scrivere facilmente sei equazioni indipendenti: tre fra le correnti ai nodi (i nodi sono quattro, quindi solo tre equazioni ai nodi sono indipendenti) e tre del tipo $\Sigma ri = \Sigma e$.

Si giunge così alle equazioni risolutive, che danno i valori delle correnti nei sei lati, ed hanno tutte al denominatore un determinante di sesto ordine.

Si può oggi semplificare notevolmente il problema di due ordini di considerazioni. In primo luogo, salvo singolarissime eccezioni, nei metodi di ponte oggi in uso si adopera solo una f.e.m. in una delle diagonali. In secondo luogo, per l'alimentazione del ponte non si ricorre più, come in addietro, a pile di resistenza interna piuttosto elevata, ma a piccole batterie di accumulatori, la cui resistenza è praticamente trascurabile rispetto alle altre resistenze in gioco, cosicché si può senza errore supporre che il ponte sia alimentato a tensione V costante. Con tali ipotesi il problema si riduce a trovare il valore della corrente I_g che la tensione V manda nella diagonale di galvanometro.

Al risultato si giunge facilmente applicando il teorema di Thevenin al circuito di figura 4.20 ove si supponga $s = 0$.

Si arriva così al circuito equivalente avente una resistenza complessiva:

$$r + \frac{ab}{a+b} + \frac{cx}{c+x}$$

nel quale agiscono in opposizione le due f.e.m.

$$E_0 = V \frac{a}{a+b} \quad E_1 = V \frac{x}{c+x}$$

La corrente I_g nel galvanometro sarà pertanto:

$$I_g = \frac{E_0 - E_1}{r + s_0 + s_1} = \frac{V_0 \frac{a}{a+b} - V_1 \frac{x}{c+x}}{r + \frac{ab}{a+b} + \frac{cx}{c+x}} = V \frac{a(c+x) - x(a+b)}{(a+b)(c+x)(r + \frac{ab}{a+b} + \frac{cx}{c+x})} = V \frac{ac - bx}{D_v}$$

a conferma che, per annullare la I_g deve essere $ac = bx$.

Quanto al denominatore D_v , si noti in primo luogo che esso risulta formato da una somma di prodotti ternari di resistenze, come è necessario per l'omogeneità della formula che dá la I_g . Il numeratore contiene infatti quadrati (prodotti binari) di resistenze: se il denominatore non fosse omogeneo con un cubo di resistenze (prodotto ternario) il coefficiente di V non risulterebbe, come è necessario, l'inverso di una resistenza.

In secondo luogo si noti che $\frac{ab}{a+b} + \frac{cx}{c+x}$ non è altro che la *resistenza esterna* al galvanometro, nell'ipotesi fatta che sia nulla la resistenza fra A e B e fra C e D. Il circuito può in tal caso disegnarsi come in figura 4.29 da cui si deduce immediatamente il valore sopra scritto per la resistenza esterna al galvanometro che indicheremo con:

$$R_{go} = \frac{ab}{a+b} + \frac{cx}{c+x}$$

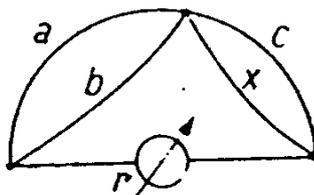


Figura 4.29: Schema equivalente per la deduzione della resistenza esterna al galvanometro

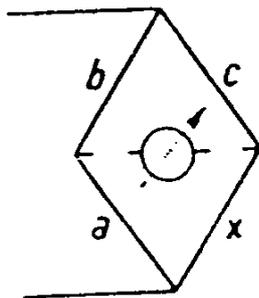


Figura 4.30: Schema di ponte in equilibrio

Con ciò risulta $D_v = (a + b)(c + x)(r + R_{go})$ che, moltiplicato e diviso per la somma $a + b + c + x = S$ dei quattro lati diventa:

$$D_v = (a + b + c + x) \frac{(a + b)(c + x)}{a + b + c + x} (r + R_{go})$$

Ma

$$\frac{(a + b)(c + x)}{a + b + c + x}$$

è la resistenza del ponte, fra i morsetti di alimentazione, nelle condizioni di equilibrio. Quando infatti il galvanometro non sia più percorso da nessuna corrente, il suo circuito può essere interrotto ($r = \infty$) senza modificare nulla nel regime del circuito, che si riduce allo schema di figura 4.30 e che presenta fra i punti di alimentazione una resistenza:

$$R_{p\infty} = \frac{(a + b)(c + x)}{a + b + c + x}$$

Con ciò possiamo scrivere $D_v = S R_{p\infty} (r + R_{go})$ espressione facile da ricordare in quanto ognuno dei suoi quattro termini ha un significato fisico ben preciso e cioè:

$$S = a + b + c + x$$

è la somma delle resistenze dei quattro lati;

$$R_{p\infty} = \frac{(a + b)(c + x)}{S}$$

è la resistenza del ponte fra i morsetti di alimentazione all'equilibrio, ossia per $r = \infty$;

$$R_{go} = \frac{ab}{a + b} + \frac{cx}{c + x}$$

é la resistenza esterna al galvanometro, supposta nulla la resistenza interna del circuito di alimentazione del ponte;

r

é la resistenza propria del galvanometro.

Giunti a questo punto, é immediato il passaggio alla considerazione del caso piú generale in cui non si possa piú considerare costante la V , ma ci si debba riferire alla f.e.m. E della sorgente, tenendo conto della resistenza interna di questa. All'equilibrio infatti, la corrente assorbita complessivamente dal ponte sará $I = \frac{V}{R_{p\infty}}$ cosicché la relazione fra la E e la V sará espressa da:

$$E = V + sI = V + V \frac{s}{R_{p\infty}} = V \left(1 + \frac{s}{R_{p\infty}}\right)$$

Basterá quindi nell'espressione che dá la I_g nel galvanometro sostituire a V il suo valore $\frac{E}{1 + \frac{s}{R_{p\infty}}}$ e si otterrá :

$$I_g = \frac{E}{1 + \frac{s}{R_{p\infty}}} \frac{ac - bx}{D_V} = E \frac{ac - bx}{D_E}$$

ponendo: $D_E = D_V \left(1 + \frac{s}{R_{p\infty}}\right)$ ossia $D_E = S(s + R_{p\infty})(r + R_{go})$.

Il denominatore della I_g nel caso piú generale é quindi dato dal prodotto di $S = a + b + c + x$, per la resistenza all'equilibrio del circuito di pila ($s + R_{p\infty}$) e per la resistenza del circuito di galvanometro ($r + R_{go}$) quando sia $s = 0$.

Il riferirsi sempre e solo alle condizioni di equilibrio del ponte, é perfettamente lecito se si pensa che, anche durante le operazioni di interpolazione, la corrente nel galvanometro é generalmente *una frazione di microampere* ed é quindi trascurabile rispetto alle correnti in gioco nel ponte che sono generalmente dell'ordine almeno dei milliampere.

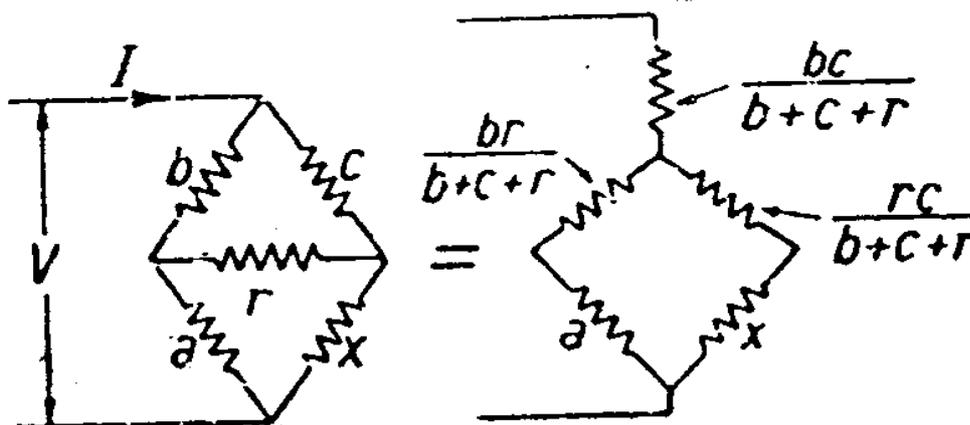


Figura 4.31:

Il valore esatto della resistenza complessiva R_p fra i morsetti di alimentazione del ponte quando si sia lontani dalla condizione di equilibrio e per r finito, si puó ottenere facilmente sostituendo (figura 4.31) alla maglia triangolare b , c , r , una stella equivalente i cui raggi hanno come é noto, i valori indicati in

figura. Risulta con ciò intuitivamente:

$$R_p = \frac{V}{I} = \frac{\left(\frac{rc}{b+c+r} + x\right)\left(\frac{br}{b+c+r} + a\right)}{a + x + \frac{r(c+b)}{b+c+r}}$$

che si può scrivere:

$$R_p = \frac{(a+b)(c+x) \frac{r}{r + \frac{(c+b)(a+x)}{a+b+c+x}} + \frac{ab}{a+b} + \frac{cx}{c+x}}{a + b + c + x}$$

L'ultimo termine al denominatore non é altro che la resistenza esterna al galvanometro, quando fosse $s = \infty$, con il quale il galvanometro rimane chiuso su un doppio arco formato dalle due resistenze $c + b$ e $a + x$. Posto pertanto $R_{g\infty} = \frac{(c+b)(a+x)}{a+b+c+x}$ si può scrivere, ricordando le precedenti posizioni, $R_p = R_{p\infty} \frac{r+R_{go}}{r+R_{g\infty}}$. Nelle condizioni di equilibrio del ponte risulta $\frac{a}{b} = \frac{x}{c} = \rho$, ossia $a = b\rho$ e $x = c\rho$. Sostituendo nelle espressioni di R_{go} e di $R_{g\infty}$, si ottiene:

$$R_{go} = \frac{\rho b^2}{(\rho+1)b} + \frac{\rho c^2}{(\rho+1)c} = \frac{\rho}{\rho+1}(c+b)$$

$$R_{g\infty} = \frac{(c+b)\rho(c+b)}{(\rho+1)b + (\rho+1)c} = \frac{\rho}{\rho+1}(c+b)$$

Risulta pertanto, all'equilibrio, $R_{go} = R_{g\infty}$ e quindi $R_p = R_{p\infty}$ come deve essere.

Il calcolo della resistenza esterna al galvanometro R_g , nel caso generale di ponte squilibrato si può fare con lo stesso procedimento seguito per il calcolo della R_p , sostituendo una stella equivalente al triangolo a, b, s , oppure sostituendo nella formula di R_p , s ad r , a a c e viceversa. Risulta:

$$R_g = \frac{ab}{a+b+s} + \frac{\left(\frac{as}{a+s+b} + x\right)\left(\frac{bs}{a+b+s} + c\right)}{c+x+s\frac{a+b}{a+b+s}} = \frac{(c+b)(a+x)}{S} \frac{s + \frac{bc}{b+c} + \frac{ax}{a+x}}{s + \frac{(a+b)(c+x)}{S}} = R_{g\infty} \frac{s + R_{po}}{s + R_{p\infty}}$$

Ma, all'equilibrio, si é visto essere $R_{po} = R_{p\infty}$. Risulterà quindi sempre all'equilibrio:

$$R_g = R_{g\infty} = \frac{\rho}{\rho+1}(c+b)R_{go}$$

ossia, nelle condizioni di equilibrio del ponte, la resistenza esterna ad una delle diagonali può calcolarsi ponendo l'altra diagonale indifferentemente uguale a zero o ad infinito. In ogni caso risulta:

$$R_{go} = R_{g\infty} = \frac{ab}{a+b} + \frac{cx}{c+x} = \frac{\rho}{\rho+1}(b+c)$$

$$R_{po} = R_{p\infty} = \frac{cb}{c+b} + \frac{ax}{a+x} = (\rho+1)\frac{bc}{b+c}$$

donde la relazione importante

$$R_{go}R_{po} = \rho bc$$

4.13.5 Sensibilità del metodo a ponte

Analiticamente, per determinare la sensibilità del ponte si può procedere con un metodo generale, valevole per tutti i metodi di zero considerando che se, all'equilibrio, quando

$$I_g = E \frac{ac - bx}{D_E} = 0$$

si dá un piccolo incremento dx alla x , si avrà nel galvanometro una:

$$dI_g = -E \frac{bdx}{D_E} = \frac{d\lambda}{K_a}$$

potendosi ritenere che il denominatore, che pure contiene la x come fattore di solo alcuni dei suoi termini, non muti sensibilmente di valore per la variazione infinitesima dx . Se quindi indichiamo con $d\lambda$ la piú piccola deviazione che si é in grado di osservare, la piú piccola dx che noi potremo apprezzare sarà data da:

$$dx = \frac{d\lambda D_E}{K_a E b}$$

(si trascura il segno, non importando il segno della deviazione). Pertanto la sensibilità del metodo sarà espressa dall'inverso dell'errore relativo:

$$\frac{dx}{x} = \frac{d\lambda D_E}{K_a E b x}$$

Tale valore coincide naturalmente con quello determinabile sperimentalmente espresso da:

$$\frac{dx}{x} = \frac{d\lambda \Delta c}{(\lambda_1 + \lambda_2)c}$$

Come si vede, e come é naturale in tutti i metodi di zero, la sensibilità aumenta con l'aumentare della sensibilità del galvanometro (K_a) e della tensione applicata. Quanto all'influenza del fattore D_E/bx che dipende dal proporzionamento delle varie resistenze che costituiscono il ponte, conviene ancora riferirsi alle condizioni di equilibrio $\frac{a}{b} = \frac{x}{c} = \rho$. Sostituendo ρb ad a e ρc a x nella espressione di D_E , essa assume la forma:

$$D_E = (\rho + 1)(b + c) \left[r + \frac{\rho}{\rho + 1}(b + c) \right] \left[s + (\rho + 1) \frac{bc}{b + c} \right]$$

E quindi

$$\frac{D_E}{bx} = \frac{D_E}{\rho b c} = \frac{(\rho + 1)(b + c)}{\rho b c} \left[r + \frac{\rho}{\rho + 1}(b + c) \right] \left[s + (\rho + 1) \frac{bc}{b + c} \right]$$

Volendo mettere in evidenza l'incognita x , basta porre $c = \frac{x}{\rho}$ con il quale si ottiene:

$$\frac{D_E}{bx} = \frac{(\rho + 1)(\rho b + x)}{\rho b x} \left[r + \frac{\rho b + x}{\rho + 1} \right] \left[s + (\rho + 1) \frac{bx}{\rho b + x} \right]$$

Molte considerazioni sono state sviluppate su questa espressione. In primo luogo si puó osservare che per la migliore utilizzazione della sorgente di f.e.m. e del galvanometro dovrebbero le loro resistenze interne essere uguali alle resistenze del circuito esterno a cui essi sono collegati, ossia dovrebbe essere $r = \frac{\rho b + x}{\rho + 1}$.

D'altra parte é intuitivo che la maggiore sensibilità si verifica quando $a = b$ e $c = x$, ossia per $\rho = 1$, nel qual caso dovrebbe essere: $r = \frac{b+x}{2}$ e $s = 2 \frac{bx}{b+x}$; e poiché $\frac{bx}{b+x}$ é minimo per $b = x$, si conclude che la massima sensibilità teorica si raggiungerebbe in un ponte in cui fossero tutti i lati uguali, cioè $a = b = c = x = r = s$.

Si arriva in tal caso a $D_E = 16r^3$ ed a $\frac{D_E}{bx} = 16r$. Dal che risulterebbe ancora la convenienza a ridurre r ossia la resistenza di tutti i lati, pur tenendo conto che al diminuire di r , per un galvanometro di

data costante intrinseca C , diminuisce la sua sensibilità amperometrica $K_a \simeq C\sqrt{r}$. All'atto pratico, evidentemente, le condizioni saranno sempre molto diverse. Sarà in generale $s < r$ ma, poiché dovrebbe essere:

$$sr = \frac{\rho b + x}{\rho + 1}(\rho + 1)\frac{bx}{\rho b + x} = bx = ac$$

data la convenienza teorica di avere $b = x$, risulterà in definitiva $sr = b^2$ ossia $b = \sqrt{sr}$. Donde la condizione di massima sensibilità:

$$a = b = c = x = \sqrt{sr}$$

Meglio di ogni possibile considerazione teorica vale la rappresentazione grafica. In figura 4.32 sono tracciate, in scala logaritmica, le curve che mostrano come vari la sensibilità:

$$\frac{x}{dx} = \frac{K_a E b x}{d\lambda D_E}$$

al variare della x per diversi valori di $\rho = a/b$ per un caso medio normale, ossia per $r = 500\Omega$, $s = 20\Omega$, $b = 100\Omega$, $K_a = 10^8 \text{ mm}/\mu\text{A}$, $E = 4V$, $d\lambda = 0,4$.

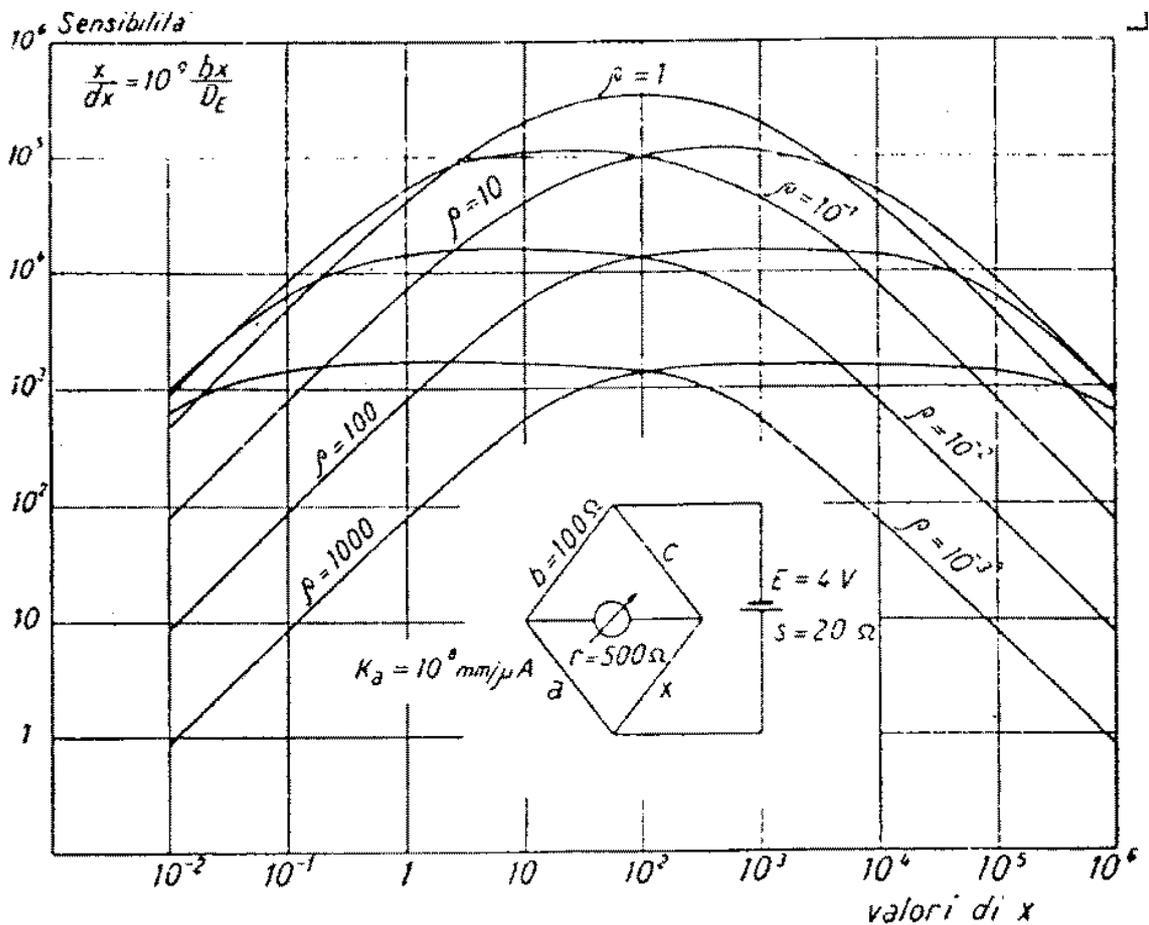


Figura 4.32: Curva di sensibilità del ponte

Come si vede, la sensibilità raggiunge in tal caso il suo valore massimo di circa 500000 per $a = b = c = x = 100$ e va decrescendo da una parte e dall'altra quanto più ci si allontana da tale condizione. Si vede anche come al diminuire di x convenga diminuire ρ ed aumentarlo quando x aumenta; condizione questa in pieno accordo con le necessità pratiche della misura. Ma comunque, anche scegliendo il

rapporto ρ piú opportuno, per $x \leq 0.1\Omega$ o per $x \geq 100000\Omega$, la sensibilità, nel caso considerato non é piú che di 10000; dal che risultano i limiti pratici già ricordati, per l'impiego del ponte.

Da quanto precede si possono dedurre, riassumendo, le seguenti regole pratiche per il corretto uso del ponte. Coi ponti (poco usati) nei quali i lati a e b costituiscono una resistenza potenziometrica e la misura si fa variando il rapporto $\rho = a/b$, si deve sempre collegare la sorgente ai vertici ax e bc e fare c prossimo a x in modo che ρ risulti quanto piú si possa vicino all'unità.

Coi ponti ordinari, si deve fare il rapporto a/b piccolo, medio o grande a seconda che x sia piccolo, medio o grande, ed inserire la pila in modo che essa alimenti in serie i due lati di minor resistenza. In pratica conviene poi scegliere il rapporto in modo da ridurre l'importanza dell'interpolazione. Quando ciò accada, quando cioè si trovi un valore esatto di c per cui il galvanometro rimane a zero, é consigliabile verificare sempre la sensibilità, dando a c una variazione Δc e osservando il $\Delta\lambda$ corrispondente.

Potrebbe infatti accadere che, per l'eccessiva riduzione del rapporto ρ , il ponte fosse in cattive condizioni di sensibilità.

Converrà infine, talvolta, controllare con l'espressione teorica di $\frac{dx}{x}$ il valore della sensibilità determinato sperimentalmente.

Un notevole divario fra i due valori sarebbe indizio di qualche anormalità del ponte: resistenza delle diagonali notevolmente maggiore di quanto supposto, od altro.

4.13.6 Ponti a deviazione

Nell'industria, quando per esempio occorra determinare rapidamente la resistenza di un gran numero di resistori, che dovrebbero essere tutti praticamente uguali entro determinati limiti di tolleranza, si usano spesso ponti a deviazione nei quali i lati a , b , c sono costituiti da tre resistenze aventi il valore che dovrebbero avere i resistori in prova, i quali con opportuni dispositivi possono essere sostituiti l'uno all'altro, sul lato x . Al posto del galvanometro si trova un milliamperometro del tipo elettromagnetico a bobina mobile, con scala a zero centrale, il quale pertanto indica la corrente che lo percorre ossia (figura 4.22):

$$I_g = V \frac{ac - bx}{(a+b)(c+x)\left(r + \frac{ab}{a+b} + \frac{cx}{c+x}\right)}$$

che per $a = b = c$ diventa:

$$I_g = V \frac{a - x}{2(a+x)\left(r + \frac{a}{2} + \frac{ax}{a+x}\right)}$$

Pertanto, se $x = a$ come dovrebbe essere, l'indice rimarrá sullo zero. In caso contrario devierà a destra o a sinistra a seconda che x sia minore o maggiore di a . E se le differenze presunte nelle varie x sono limitate a qualche per cento, si può ritenere che il denominatore sia costante, e scrivere:

$$\lambda = I_g = V(a - x) = V\Delta$$

talché, se V é mantenuto praticamente costante, la scala dello strumento può essere graduata direttamente in Δ . Con ciò si legge direttamente sulla scala dello strumento lo scarto Δ del valore x effettivo della resistenza da quello a che essa dovrebbe avere.

4.13.7 Doppio ponte di Thomson (Lord Kelvin)

Altro cospicuo esempio di ponte a piú di quattro lati é il doppio ponte di Lord Kelvin, particolarmente adatto, come meglio si vedrá alla misura di piccole o piccolissime impedenze o resistenze, a seconda che lo si usi con corrente alternata o continua.

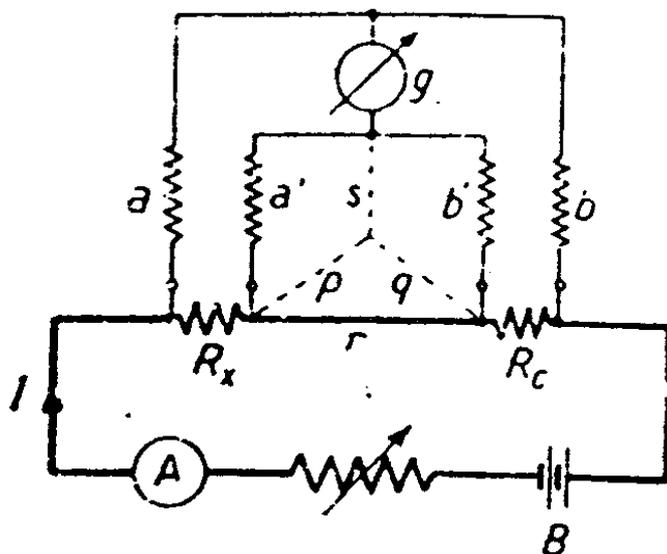


Figura 4.33: Doppio ponte di Thomson

In figura 4.33, che considera un doppio ponte per corrente continua, si suppone di dover misurare una resistenza R_x che, messa in serie con una resistenza nota R_c , dello stesso ordine di grandezza, viene fatta percorrere dalla corrente I data dalla batteria B e controllata da un amperometro A . Costruttivamente i quattro resistori regolabili a , a' , b e b' sono fatti in modo che si possa sempre fare $a = a'$ e $b = b'$.

All'uopo di solito i lati a e a' sono costituiti per esempio ciascuno da tre resistori a spine che possono avere i valori 1, 10 e 100 Ω , mentre i lati b e b' sono costituiti da complessi di decadi a comandi collegati in modo che, automaticamente, durante le manovre, risulti sempre $b = b'$.

Lo schema si riduce immediatamente a quello di ponte ordinario a quattro lati sostituendo al triangolo formato da a' , b' e dalla connessione r che collega R_c con R_x , una stella equivalente p , q , s in cui

$$p = \frac{a'r}{S}$$

$$q = \frac{b'r}{S}$$

$$s = \frac{a'b'}{S}$$

dove

$$S = a' + b' + r$$

é la somma delle tre resistenze del triangolo primitivo. Si ottiene cosí un ponte ordinario i cui lati

sono $a, b, R_c + q, R_x + p$ per il quale il galvanometro sarà ridotto a zero quando

$$(R_x + p)b = (R_c + q)a$$

donde, sostituendo a p e q i loro valori,

$$(R_x + \frac{a'r}{S})b = (R_c + \frac{b'r}{S})a$$

da cui

$$R_x = \frac{a}{b}R_c + \frac{r}{S}(\frac{b'a}{b} - a') \quad (4.1)$$

Ma se, come detto $a = a'$ e $b = b'$ il secondo termine del secondo membro si annulla e risulta $R_x = R_c \frac{a}{b}$.

Si arriva così alla formula stessa del ponte ordinario, del quale il doppio ponte conserva l'elevata sensibilità, mentre la misura è del tutto indipendente dalle eventuali variazioni della corrente I . Il valore di tale corrente deve essere scelto, per ovvie ragioni di sensibilità, il più elevato possibile, compatibilmente con la necessità di limitare l'errore di temperatura dovuto al riscaldamento delle R_c ed R_x . Sulla questione si tornerà nel seguito.

La formula completa 4.1 è interessante perché mostra quale può essere l'errore sistematico del metodo nel caso che la condizione $a = a'$ e $b = b'$ non sia rigorosamente rispettata. Si vede infatti che tale errore sarà sempre assai piccolo, dato il termine $(\frac{b'a}{b} - a')$ già piccolo di per se stesso, viene moltiplicato per $r/S = \frac{r}{a'+b'+r}$ sempre molto minore dell'unità dato che la connessione r sarà sempre di piccola resistenza relativamente ai termini a' e b' .

Che la sensibilità aumenti con l'aumentare della I appare evidente se si considera che, in sostanza, il metodo confronta le d.d.p. agli estremi delle R_x e R_c le quali tendono a inviare nel galvanometro due correnti di senso opposto.

Quanto al nome di doppio ponte dato dal Thompson al suo metodo, esso deriva dalla considerazione che, lungo la connessione r (figura 4.34) vi sarà sempre un punto P allo stesso potenziale del punto N , cosicché un secondo galvanometro derivato fra N e P sarebbe anch'esso ridotto a zero.

Si possono poi considerare contemporaneamente due ponti: uno costituito dai lati a', b', α e β (essendo α e β le due parti in cui la r viene divisa dal punto P) per il quale sarà:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{a'}{b'} = \rho$$

L'altro ponte è invece formato dalla $a, b, R_c + \frac{\beta b'}{\beta + b'}$ e $R_x + \frac{\alpha a'}{\alpha + a'}$, dato che, essendo equipotenziali i punti N e P , è come se fossero coincidenti, con il quale la a' risulta in parallelo con la α e la b' con la β . La condizione di equilibrio del secondo ponte si scrive:

$$(R_c + \frac{\beta b'}{\beta + b'})a = (R_x + \frac{\alpha a'}{\alpha + a'})b$$

da cui, ponendo

$$a = \rho\beta$$

e

$$a' = \rho b'$$

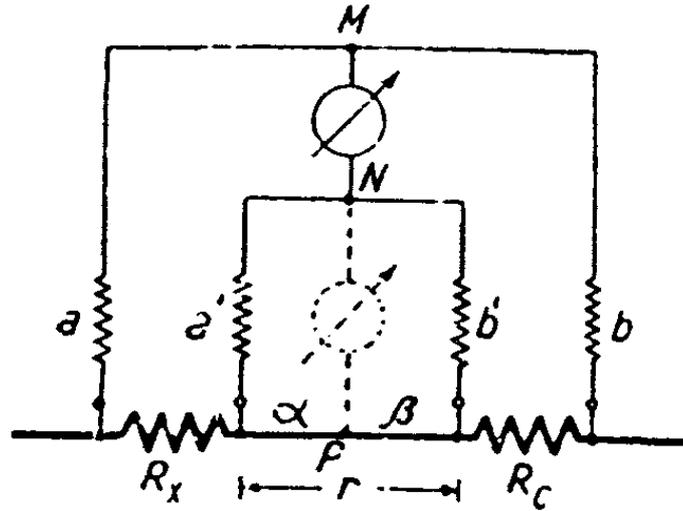


Figura 4.34: Genesi del nome del doppio ponte

si ricava:

$$R_x = \frac{a}{b} R_c + \frac{\beta}{\beta + b'} \left(\frac{ab'}{b} - a' \right)$$

relazione che coincide con la formula 4.2, dato che per la proporzionalità $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{a'}{b'}$, risulta

$$\frac{\beta}{\beta + b'} = \frac{\alpha + \beta}{\beta + b' + \alpha + a'} = \frac{r}{a' + b' + r} = \frac{r}{S}$$

Ovvia é la possibilità di usare il doppio ponte anche con corrente alternata: basta considerare tutte le relazioni sopra scritte come relazioni vettoriali fra le impedenze dei vari lati anziché come relazioni algebriche fra le loro resistenze. La condizione di equilibrio vettoriale

$$Z_x Z_b = Z_c Z_a$$

si scinderá al solito in una doppia condizione algebrica. In particolare essa può essere soddisfatta quando Z_x e Z_c siano impedenze simili; nel qual caso:

$$\frac{R_x}{R_c} = \frac{X_x}{X_c} = \frac{a}{b}$$

come per il ponte. Si dovrà pertanto anche qui regolare qualche altro elemento, oltre che il rapporto a/b , per poter realizzare la condizione di zero. Come caso particolare piú importante, quando $Z_c = R_c$ sia una piccola resistenza non induttiva, e Z_x una piccola impedenza, si potrà (figura 4.35) ricorrere a due capacità regolabili.

4.13.8 Metodi di ponte a corrente alternata

La teoria generale del ponte a corrente alternata si può facilmente dedurre da quella del ponte a corrente continua. Basta perciò interpretare come equazioni vettoriali le equazioni algebriche che danno i valori della corrente (continua) in ciascun lato del ponte. In particolare la condizione di equilibrio $ac = bx$ (da cui $x = ac/b$) si deve interpretare come relazione vettoriale fra le quattro impedenze costituenti i quattro lati del ponte (caso piú generale) scrivendola:

$$Z_x Z_b = Z_c Z_a \quad (4.2)$$

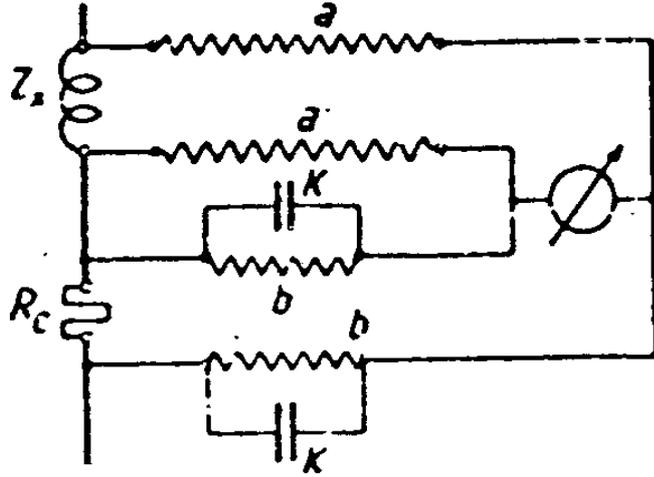


Figura 4.35: Doppio ponte a.c.a.

oppure

$$Z_x = Z_a Z_c Y_b \quad (4.3)$$

Sostituendo i complessi (genericamente: $Z = R + jX$) si ottiene:

$$(R_a R_c - X_a X_c) + j(X_a R_c + X_c R_a) = (R_b R_x - X_b X_x) + j(X_b R_x + X_x R_b)$$

Perché tale relazione sia soddisfatta, devono essere soddisfatte contemporaneamente le due relazioni:

$$R_a R_c - X_a X_c = R_b R_x - X_b X_x$$

$$X_a R_c + X_c R_a = X_b R_x + X_x R_b$$

che si possono scrivere anche:

$$R_a R_c - R_b R_x = X_a X_c - X_b X_x$$

$$X_a R_c - X_b R_x = X_x R_b - X_c R_a \quad (4.4)$$

Sono queste le due condizioni che devono essere contemporaneamente soddisfatte per annullare ogni corrente nel galvanometro.

Come caso particolare, se $R_a R_c = R_b R_x$, ossia se le resistenze dei quattro lati soddisfano le condizioni di equilibrio, in virtù della prima deve essere anche: $X_a X_c = X_b X_x$, ossia anche le quattro reattanze devono stare nelle stesse proporzioni, cioè:

$$\frac{R_x}{R_c} = \frac{R_a}{R_b} = \frac{X_x}{X_c} = \frac{X_a}{X_b}$$

In modo più intuitivo, le condizioni di equilibrio si possono dedurre dal diagramma vettoriale del ponte che è facile tracciare per le condizioni di equilibrio. Basta infatti pensare che, in tali condizioni, non passando alcuna corrente nel galvanometro, i lati a e b sono percorsi da una stessa corrente I_a e i lati Z_c e Z_x dalla stessa I_x . Da tale diagramma in cui:

$$\overline{OA} = R_a I_a, \overline{AM} = X_a I_a, \overline{OX} = R_x I_x, \overline{XM} = X_x I_x,$$

$$\overline{MB} = R_b I_a, \overline{BD} = X_b I_a, \overline{MC} = R_c I_x, \overline{CD} = X_c I_x,$$

risulta infatti subito: $Z_a I_a = Z_x I_x$ e $Z_b I_a = Z_c I_x$ che, divise membro a membro, danno (relazioni algebriche): $Z_x Z_b = Z_c Z_a$

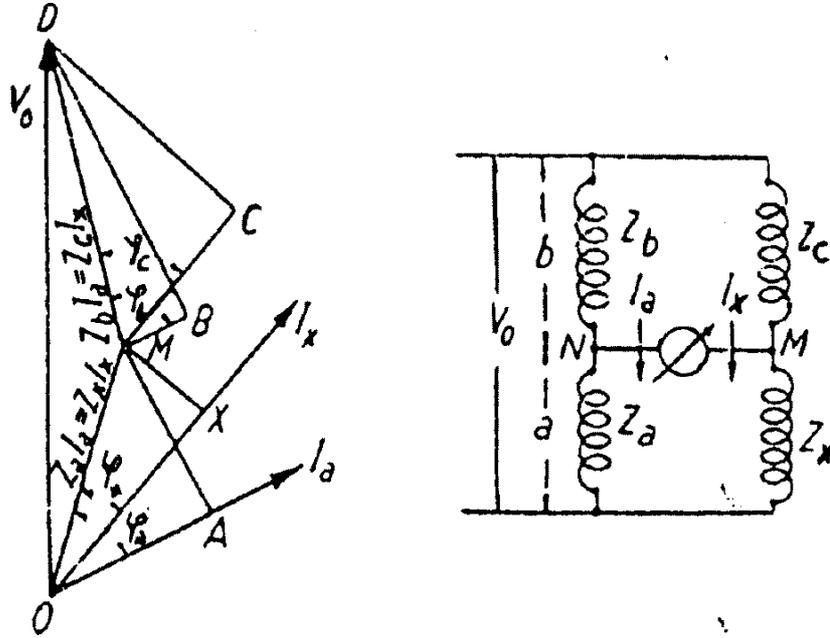


Figura 4.36: Schema e diagramma generale di un ponte a corrente alternata

Ma risulta anche immediatamente: $\varphi_a - \varphi_x = \varphi_b - \varphi_c$

Le due condizioni di equilibrio risultano pertanto espresse algebricamente dalle due relazioni fondamentali:

$$\begin{aligned} Z_x &= \frac{Z_a Z_c}{Z_b} = Z_a Z_c Y_b \\ \varphi_x &= \varphi_a - \varphi_b + \varphi_c \end{aligned} \tag{4.5}$$

che equivalgono alle formule 4.4.

Anche la seconda delle formule 4.5 ci dice che se, come caso particolare, $\varphi_a = \varphi_b$ (ossia le due impedenze Z_a e Z_b sono simili) risulta $\varphi_x = \varphi_c$ (ossia anche Z_c e Z_x devono essere simili).

Il fatto di dover soddisfare contemporaneamente due condizioni indipendenti si traduce, durante la misura, nella necessità di regolare due delle otto grandezze in gioco, indipendentemente l'una dall'altra. La cosa appare intuitiva, considerando ancora la figura 4.36. Dei quattro triangoli rettangoli OAM, OXM, MBD, MCD, la prima coppia (OXM e MCD) si può disegnare in modo qualunque, solo rispettando il parallelismo dei lati e la posizione dei vertici O e D. Della seconda coppia, il primo si può ancora disegnare in modo qualunque sull'ipotenusa OM, ma con ciò il quarto rimane poi perfettamente definito. Ciò vuol dire che, date tre qualunque delle quattro impedenze, si potrà annullare la corrente nel galvanometro solo se si potranno regolare al valore voluto, e indipendentemente l'una dall'altra, la R e la X della quarta.

4.13.9 Esempi di ponti a corrente alternata

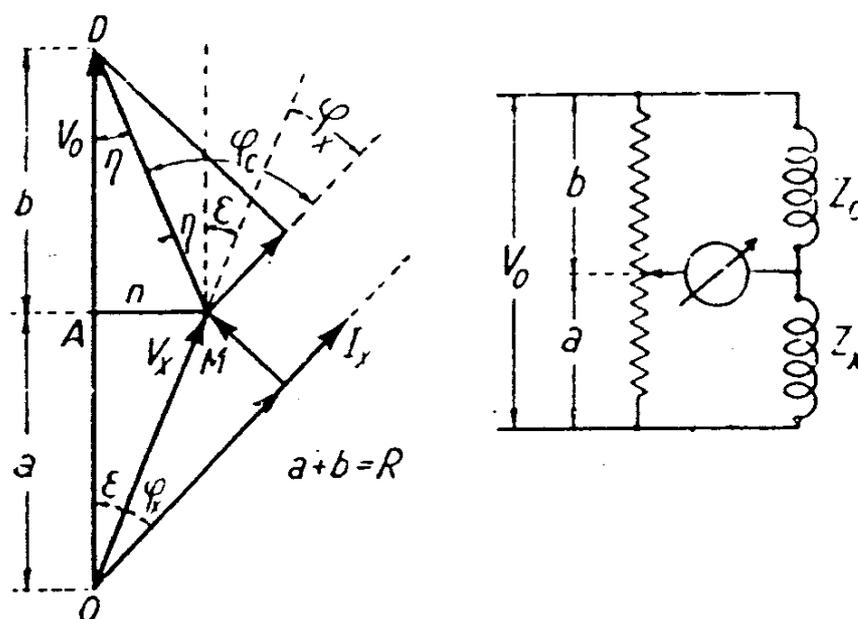


Figura 4.37: Ponte per proiezione

Considerando il caso, particolarmente semplice, di un ponte costituito da due resistenze (a e b) e da due impedenze (figura 4.37) è chiaro che per poter annullare ogni corrente nel galvanometro, ossia per ottenere un metodo di zero propriamente detto, bisognerebbe che la V_x coincidesse con la frazione della V_0 che esiste agli estremi della parte a della $R = a + b$. Ciò può accadere (figura 4.38) solo se le due impedenze Z_x e Z_c sono simili ($\varphi_x = \varphi_c$).

Quando sia soddisfatta tale condizione risulta intuitivamente:

$$\frac{a}{b} = \frac{Z_x}{Z_c} = \frac{R_x}{R_c} = \frac{X_x}{X_c}$$

Sia le resistenze dei quattro lati stanno nei rapporti voluti per l'equilibrio, anche le reattanze devono soddisfare tale rapporto. Ovviamente quando la Z_x e la Z_c , siano qualunque, non si potrà giungere alla voluta condizione di equilibrio se non alterando un delle due in modo da renderla simile all'altra. Ora un'impedenza può essere modificata nei suoi elementi costitutivi in molti modi diversi: aggiungendo ad essa, in serie o in parallelo, una resistenza, una induttanza, una capacità, donde una grande varietà in questi schemi di ponte.

Per esempio, nel caso più semplice del confronto di due impedenze induttive, si può adottare lo schema della figura 4.39. La resistenza R regolabile, può, mediante il deviatore d , essere messa in serie con l'una o con l'altra delle due impedenze, e precisamente con quella delle due che è relativamente meno resistente. Riferendosi ancora al caso della figura 4.37, essendo $\varphi_c > \varphi_x$, si dovrebbe mettere la R in serie con la Z_c . Ciò fatto, regolando la R si possono rendere simili le impedenze dei due lato ($Z_c + R$) e Z_x in modo da far cadere il punto M sulla OD . Regolando quindi il rapporto delle resistenze a e b si potrà annullare ogni corrente nel galvanometro. Sarà, allora, come già detto:

$$\frac{a}{b} = \frac{X_x}{X_c} = \frac{R_x}{R_c + R}$$

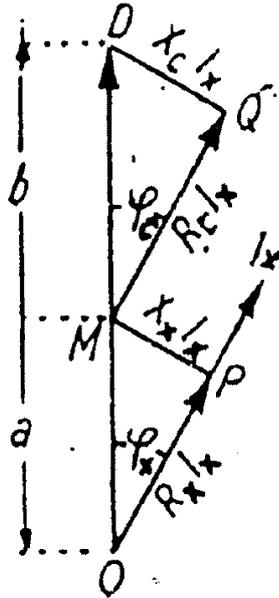


Figura 4.38: Diagramma del ponte all'equilibrio

Con questo schema, che costituisce il *ponte di Wien* per la misura delle induttanze o delle capacità, le due grandezze da regolare indipendentemente l'una dall'altra sono la R e la a (o la b).

È interessante notare che la regolazione della R fa spostare il punto M su un arco di cerchio facilmente individuabile.

La posizione in cui esso dovrà trovarsi ad equilibrio raggiunto, si ottiene prolungando la \overline{MN} (figura 4.40). Tale prolungamento infatti taglia la \overline{OB} nel punto A , il quale è il solo che soddisfa la condizione:

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{PM}}{\overline{NB}} = \frac{X_x}{X_c} = \frac{a}{b}$$

Ma d'altra parte, durante la regolazione della R , il triangolo OPM deve conservarsi simile a se stesso, perché le caratteristiche della Z_x non mutano. Pertanto, tracciata la \overline{AC} che formi con la \overline{OA} l'angolo alfa uguale all'angolo OMP , il suo punto d'incontro C con il prolungamento della \overline{MP} individua in \overline{OC} la corda del cerchio passante per A e per M , su cui si deve muovere il punto M in modo che, da esso, la corda stessa sia sempre vista sotto l'angolo α .

Come già detto si possono pensare e realizzare molti diversi schemi di ponte variando l'artificio mediante il quale si rendono simili le due impedenze da confrontare. Si possono allo scopo adottare induttanze, capacità e resistenze regolabili. In ogni caso per raggiungere le condizioni di equilibrio si dovranno regolare indipendentemente due grandezze.

Considerando, per esempio, lo schema del *ponte di Maxwell* (figura 4.41), il galvanometro (a vibrazione o ad amplificatori) potrà essere ridotto a zero regolando contemporaneamente la resistenza c e la capacità variabile K in parallelo sul lato b . Detta Z_b l'impedenza dell'arco doppio formato dalla K con la b , avremo allora, come al solito:

$$ac = Z_b Z_x$$

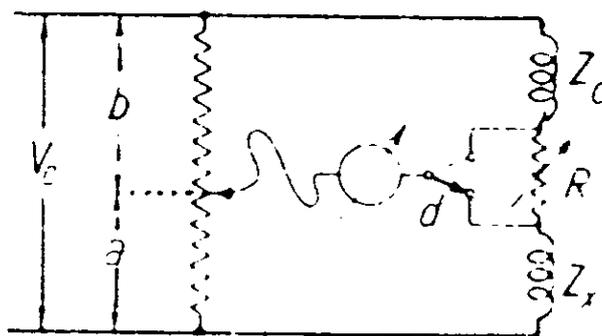


Figura 4.39: Schema del ponte di Wien

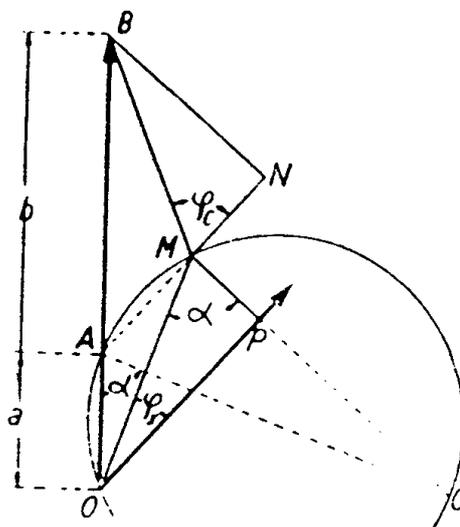


Figura 4.40:

Ma

$$Z_x = R_x + j\omega L_x$$

$$Z_b = \frac{1}{1/b + j\omega K} = \frac{b}{1 + j\omega K b}$$

sostituendo : $ac(1 + j\omega K b) = b(R_x + j\omega L_x)$ che, uguagliando parti reali e immaginarie, si scinde nelle due $ac = bR_x$ e $ac\omega K b = b\omega L_x$ da cui

$$R_x = \frac{a}{b}c$$

ed

$$L_x = acK$$

che ci danno i parametri cercati della Z_x in funzione delle tre resistenze a , b e c e della capacità K , indipendentemente dal valore della frequenza, ossia della pulsazione.

Non va dimenticato che, in generale i valori di R_x ed L_x così determinati sono i valori delle grandezze del circuito equivalente in serie che si può pensare di sostituire alla Z_x . Tali valori equivalenti valgono

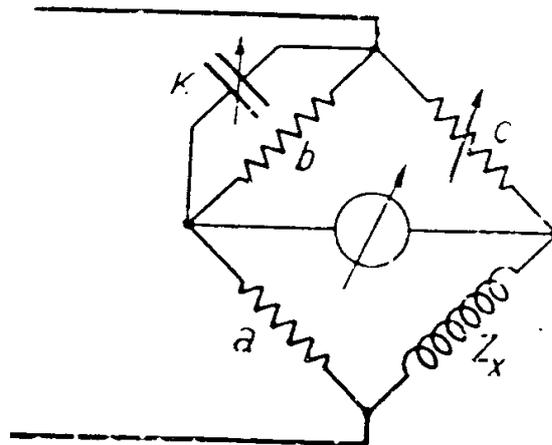


Figura 4.41: Ponte di Maxwell

esclusivamente per la frequenza e per la forma della curva con cui furono determinati. In generale le variazioni di tale valore al variare della frequenza sono modeste, tanto che in molti casi i valori stessi si suppongono costanti, almeno nei limiti ordinari delle frequenze industriali, ma anche con frequenze industriali le variazioni possono diventare assai notevoli se la Z_x contiene materiali magnetici o se il circuito é formato da conduttori massicci di notevole sezione. In tal caso le perdite nel ferro fanno aumentare, con la frequenza, il valore della resistenza equivalente, che tiene conto delle perdite stesse, mentre le correnti indotte nella massa dei conduttori fanno diminuire l'induttanza.

Degno di nota il fatto che tanto in questo metodo quanto in altri che vedremo piú avanti, la formula risolutiva per la R_x é la stessa che nel ponte a corrente continua. Ne consegue la possibilitá di eseguire il metodo in due tempi: in un primo tempo, alimentato il ponte con una f.e.m. continua e usando un ordinario galvanometro per c.c., si equilibra il ponte regolando la c , con che appunto:

$$R_x = \frac{a}{b}c$$

La presenza della capacitá K derivata sul lato b , non disturba affatto la misura se si ha cura di chiudere la chiave di pila prima di quella di galvanometro, in modo che le correnti dovute al fenomeno transitorio della carica del condensatore, e che si sovrappongono a quelle di regime, siano cessate quando il galvanometro viene inserito. In un secondo tempo, alimentando il ponte a corrente alternata e usando un galvanometro a vibrazione, lo si riduce a zero regolando il solo condensatore K , senza piú toccare le resistenze a , b e c . Si realizza cosí la seconda condizione di equilibrio

$$L_x = acK$$

É interessante ricordare questo possibile modo di procedere, in quanto molti di questi metodi di ponte nacquero assai prima che si sviluppasse le misure a corrente alternata, per la misura di induttanze e capacitá, utilizzando appunto il procedimento in due tempi. Regolate, nel primo tempo, le resistenze in modo da ottenere $R_x = \frac{a}{b}c$, nel secondo tempo bastava chiudere prima la chiave di galvanometro e poi quella di pila. Con ciò il galvanometro riceveva un impulso dovuto alla corrente transitoria; impulso che si poteva eliminare regolando la capacitá K , ossia realizzando di fatto l'altra condizione $L_x = acK$. La sensibilità di questa seconda fase risultava naturalmente piuttosto limitata: molto minore di quella

raggiungibile alimentando il ponte in corrente alternata. Di piú non si deve dimenticare che salvo in caso di induttanze senza ferro e di filo sottile (non sede di apprezzabili correnti parassite) e di condensatori senza perdite, i valori di R_x , L_x e K sono sempre valori *equivalenti*, valevoli solo per quella particolare frequenza con cui vengono misurati i valori ottenuti coi vecchi metodi a corrente continua in due tempi, possono pertanto risultare sensibilmente diversi da quelli a frequenza industriale.

Per quanto il ponte di Maxwell possa servire per misure di capacitá, quando al posto della Z_x si ponga un induttore campione, si preferisce generalmente ricorrere al confronto diretto con condensatori campione, che sono piú facilmente realizzabili degli induttori.

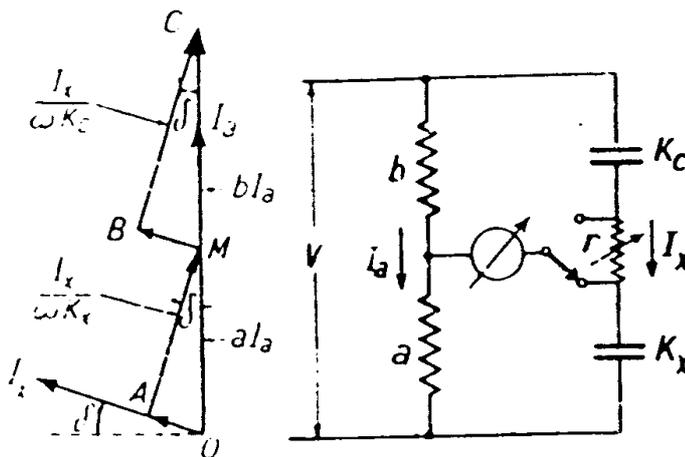


Figura 4.42: Ponte di Gott

Il metodo a cui generalmente si ricorre é quello del *ponte di Gott* di cui la figura 4.42 dá lo schema e il diagramma vettoriale, e che puó dirsi il reciproco del ponte di Wien. Il diagramma vettoriale suppone che i due condensatori K_c e K_x messi a confronto abbiano forti perdite. La piccola resistenza regolabile r , ch esi puó mettere in serie con quello dei due condensatori che ha relativamente minori perdite (il K_c , nel caso in figura), serve ancora per rendere simili i triangoli relativi ai due condensatori. Ad equilibrio raggiunto risulta:

$$\frac{K_x}{K_c} = \frac{b}{a}$$

$$\frac{r_x}{r_c + r} = \frac{a}{b}$$

Si noti la caratteristica inversione del rapporto a/b che é proprio di questo metodo.

L'importanza pratica del ponte di Gott deriva dal fatto che, nei condensatori usati normalmente nei laboratori, l'angolo di perdita delta é estremamente piccolo talché i segmenti \overline{OA} e \overline{MB} diventano trascurabili e le tensioni $\frac{I_x}{\omega K_x}$ e $I_x \omega K_c$ cadono praticamente sulla \overline{OC} . Si puó quindi ottenere praticamente l'azzeramento regolando soltanto il rapporto a/b e scrivere

$$K_x = K_c \frac{b}{a}$$

Analogo al precedente, e assai usato per lo studio dei condensatori é il *ponte di Schering*. Com'é noto, un condensatore imperfetto (avente cioé una certa perdita nel dielettrico, per cui la corrente in esso,

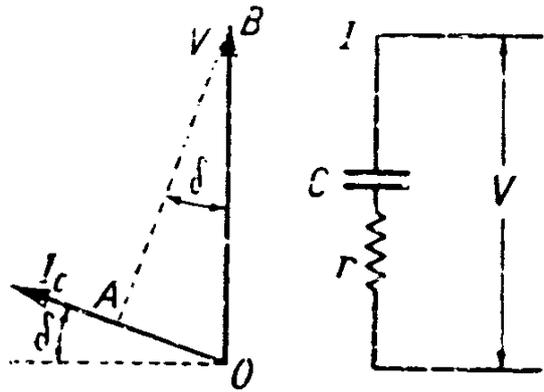


Figura 4.43: Circuito equivalente di un condensatore

anziché a 90° in anticipo sulla tensione è spostata solo di $90^\circ - \delta$) può sempre concepirsi come un condensatore perfetto messo in serie con una resistenza ohmica r (figura 4.43).

Essendo: $\overline{OA} = rI_c$, e $\overline{AB} = \frac{I_c}{\omega C}$ risulta $\tan(\delta) = \frac{\overline{OA}}{\overline{AB}} = r\omega C$.

Ciò premesso, lo schema del ponte di Schering è dato in figura 4.44. In esso il complesso C_x, r_x , rappresenta, per quanto si è detto, il condensatore incognito, che si può concepire come una impedenza Z_x ; C è un condensatore di capacità nota, senza perdite; a e b sono due resistenze ohmiche; K un condensatore variabile.

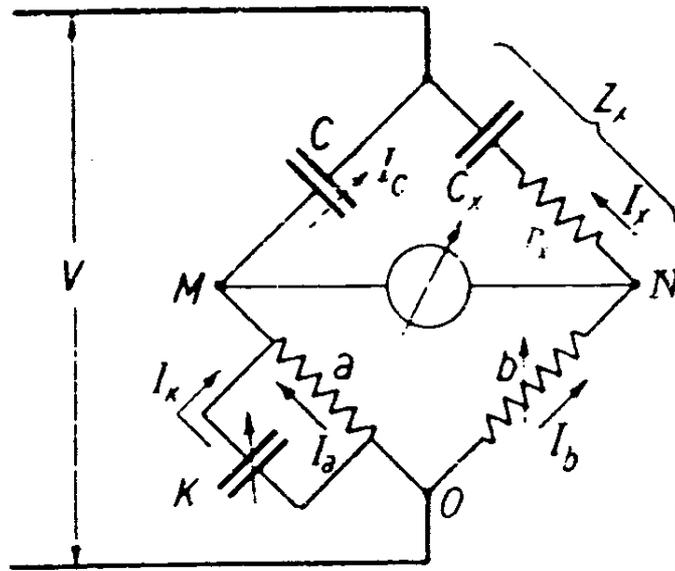


Figura 4.44: Ponte di Schering

Per l'equilibrio deve essere, come sempre:

$$Z_x = Z_b Z_c Y_a$$

dove

$$Z_x = r_x - j \frac{1}{\omega C_x}$$

$$Z_b = b$$

$$Z_c = -j \frac{1}{\omega C}$$

$$Y_a = \frac{1}{a} + j\omega K$$

sostituendo si ottiene:

$$Z_x = j \frac{b}{\omega C} \left(\frac{1}{a} + j\omega K \right)$$

che, uguagliando separatamente le parti reali e immaginarie, ci dá:

$$r_x = b \frac{K}{C}$$

$$C_x = C \frac{a}{b}$$

D'ordinario, nel caso di condensatori imperfetti, si usa definirli in base al valore di $\tan(\delta)$: si ha

$$\tan(\delta) = r_x \omega C_x = \omega a K$$

Allo stesso risultato si può giungere considerando il diagramma vettoriale del ponte all'equilibrio, rappresentato in figura 4.45.

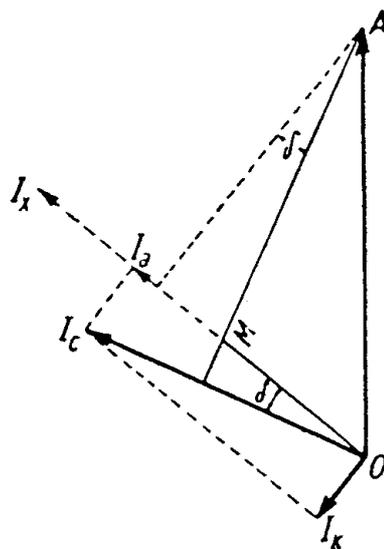


Figura 4.45:

Si ha infatti: $\overline{OM} = aI_a = bI_x = aI_c \cos(\delta)$; $\overline{MA} = Z_x I_x = \frac{1}{\omega C} I_c$.

Dividendo

$$\frac{b}{Z_x} = \omega C a \cos(\delta)$$

Ma

$$\frac{1}{\omega C_x} = Z_x \cos(\delta)$$

ossia

$$Z_x = \frac{1}{\omega C_x \cos(\delta)}$$

e quindi

$$b\omega C_x \cos(\delta) = \omega C a \cos(\delta)$$

donde

$$C_x = \frac{a}{b} C$$

mentre

$$\tan(\delta) = \frac{I_k}{I_a} = \omega K a$$

4.13.10 Ponti a corrente alternata con piú di quattro lati

Le considerazioni finora fatte possono sembrare insufficienti di fronte ai tipi piú complessi di ponte ormai entrati largamente nell'uso, come per esempio il *ponte di Anderson* per la misura delle induttanze, del quale la figura 4.46 dá lo schema.

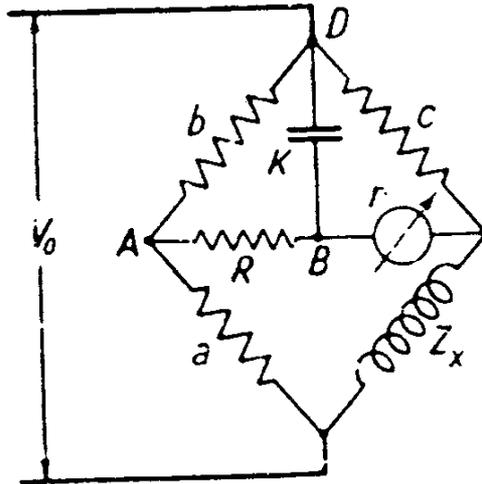


Figura 4.46: Schema del ponte di Anderson

Essi possono invece facilmente ricondursi sempre ai casi ordinari finora considerati. Cosí nel caso del ponte di Anderson, chiamando x la reattanza di capacitá $\frac{1}{\omega K}$ del condensatore K , potremo sempre, al triangolo ABD , formato dalle resistenze R e b e dalla $x = -j\frac{1}{\omega K}$ sostituire una stella equivalente.

Sarà pertanto possibile sostituire allo schema del ponte di Anderson della figura 4.47a lo schema della figura 4.47b purché fra gli elementi *non coincidenti* dei due sussistano le relazioni:

$$p = \frac{bR}{b + R + x}$$

$$q = \frac{bx}{b + R + x}$$

$$s = \frac{Rx}{b + R + x}$$

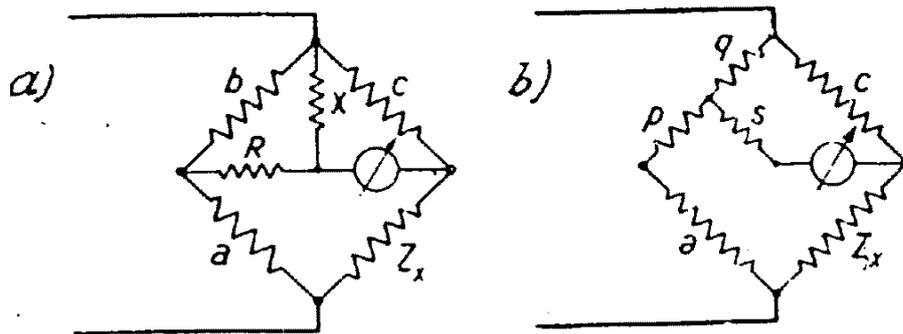


Figura 4.47: Trasformazione del ponte di Anderson in ponte ordinario

Siamo così ricondotti a un ponte ordinario i cui quattro lati sono: $a + p$, q , c , Z_x . La s in serie col galvanometro non interviene nella condizione di equilibrio che si scrive:

$$(a + p)c = qZ_x$$

Sostituendo a p e q i valori:

$$\left(a + \frac{bR}{b + R + x}\right)c = \frac{bx}{b + R + x}Z_x$$

donde:

$$[a(b + R + x) + bR]c = bxZ_x$$

Sostituendo i complessi, ricordando che a , b , c , R sono semplici resistenze che $x = -j\frac{1}{\omega K}$ e che $Z_x = R_x + j\omega L_x = R_x + j\omega L_x$, si ottiene:

$$\left[a\left(b + R - j\frac{1}{\omega K}\right) + bR\right]c = -j\frac{b}{\omega K}(R_x + j\omega L_x)$$

ossia

$$ca(b + R) + bRc - j\frac{ac}{\omega K} = \frac{\omega b L_x}{\omega K} - j\frac{b R_x}{\omega K}$$

Questa relazione si scinde nelle due condizioni:

$$\omega K[ca(b + R) + bRc] = \omega b L_x$$

$$ac = bR_x$$

La seconda ci mostra che le resistenze dei quattro lati del ponte devono soddisfare alla solita condizione di equilibrio, ossia:

$$R_x = \frac{a}{b}c$$

La prima si semplifica nella relazione:

$$L_x = Kc[a(1 + \frac{R}{b}) + R]$$

che ci dá il valore dell'induttanza L_x della Z_x in funzione della capacità K e delle quattro resistenze.

Se pertanto si regolano per successivi tentativi le resistenze fino ad annullare ogni corrente nel galvanometro, le ultime due relazioni ci danno i valori cercati di R_x e di L_x , indipendentemente dal valore della frequenza. Oppure quando la Z_x sia a parametri costanti (induttanza senza ferro) si può prima alimentare il ponte con corrente continua, sostituendo al galvanometro a vibrazione un galvanometro elettromagnetico, e, fissato a/b , regolare la c fino all'equilibrio. La presenza del condensatore K non influisce infatti sull'equilibrio del ponte. Quindi, alimentando il ponte con corrente alternata, senza più toccare a , b , c , si ridurrá a zero il galvanometro a vibrazione (o equivalente) regolando la R .

L'uso di uno schema piú complesso, qual é quello del ponte di Anderson, in confronto con quello del ponte di Maxwell, é giustificato dal fatto che esso consente la misura di induttanze di maggior valore utilizzando lo stesso condensatore campione, il quale inoltre non deve essere piú di tipo regolabile.

4.13.11 Ponti automatici a corrente alternata

Come abbiamo già visto é ovvia la possibilità di realizzare ponti a corrente alternata a regolazione ed eventuale registrazione automatica. In modo del tutto analogo basterá inserire sulla diagonale di galvanometro due relé i quali sentano rispettivamente la componente in fase e la componente in quadratura con la tensione che alimenta il ponte, e comandino due servomotori i quali regolino indipendentemente le due variabili del metodo. Cosí per esempio, nel caso del ponte di Schering, uno dei servomotori dovrà regolare il lato b e l'altro il condensatore variabile K . Come nel caso del potenziometro si potrà ottenere una regolazione diretta utilizzando due strumenti a induzione che riuniscano in sé le funzioni di relé e di servomotore.

4.13.12 Le schermature nei ponti in corrente alternata

Nelle *misure con corrente alternata*, oltre alle deficienze di isolamento interno ed esterno, sono da temersi anche gli accoppiamenti parassiti, capacitivi e induttivi, fra le varie parti del circuito, ma isofrequenziali con la corrente di misura.

I concatenamenti parassiti sono tanto piú dannosi quanto é maggiore la frequenza; perciò, mentre hanno una influenza modesta a frequenza industriale, acquistano importanza notevole per le medie frequenze (acustiche) e diventano assolutamente preponderanti per le radiofrequenze.

Limitandoci alle frequenze industriali o, al piú, acustiche, osserviamo che la protezione contro le correnti disperse di conduzione si effettua con piastre ed anelli di guardia, come per la corrente continua.

I concatenamenti parassiti capacitivi hanno luogo fra i vari tronchi del circuito di misura che vengono a costruire altrettante armature di condensatori aventi per dielettrico l'aria interposta; attraverso l'aria avvengono scambi di corrente dielettrica che non seguono le vie normali previste dal circuito di misura e possono falsare anche gravemente i risultati.

Per eliminare o almeno guidare questi scambi, il procedimento è quello di interporre sul percorso della corrente dielettrica un conduttore (lastra o tubo, a seconda della forma del circuito da proteggere) collegato in modo che assuma un potenziale prossimo a quello del tratto di circuito da proteggere; alle capacità parassite fra i due tratti di circuito si vengono così a sostituire due capacità in serie, di cui quella fra il tronco da proteggere e lo schermo (elettrostatico o meglio dielettrico) è senza effetti sulla misura, essendo piccolissima la loro differenza di potenziale, mentre l'altra dà luogo a un passaggio di corrente solitamente maggiore di quella che circola quando non esiste schermatura, ma che costituisce solo una maggiore prestazione per la sorgente che alimenta il circuito, mentre è senza effetti sulla misura, non interessando le parti che devono essere protette.

Si ripete cioè il procedimento, già noto per le correnti di conduzione, di tagliare la strada alle correnti disturbanti che sono ora correnti dielettriche.

Non sempre però il procedimento è applicabile facilmente; talvolta la capacità fra schermo e tronco da proteggere, se pure è piccola la loro differenza di potenziale, deve essere presa anch'essa in considerazione nella espressione dei risultati, ciò che obbliga a conoscerla con esattezza e complica i conteggi.

Tipico il caso del ponte di Schering schermato nei tratti che vanno dai due condensatori (il campione e quello in prova) ai vertici di galvanometro (figura 4.48). Si ritiene solitamente che questa schermatura, abbinata a un allontanamento dei due condensatori, e quindi dell'alta tensione, dal galvanometro e dai lati resistivi del ponte, sia sufficiente allo scopo, perché protegge dagli effetti dei concatenamenti con l'alta tensione i due tronchi di circuito che collegano i condensatori, mentre alla protezione degli altri due lati del ponte e del galvanometro sopperisce la lontananza. Gli schermi sono in questo caso costituiti da due tubi metallici flessibili che circondano i due conduttori e si prolungano fino agli anelli di guardia contribuendo di fatto anche a drenare la corrente di conduzione superficiale e a delimitare una zona dei due condensatori in cui il campo dielettrico è uniforme.

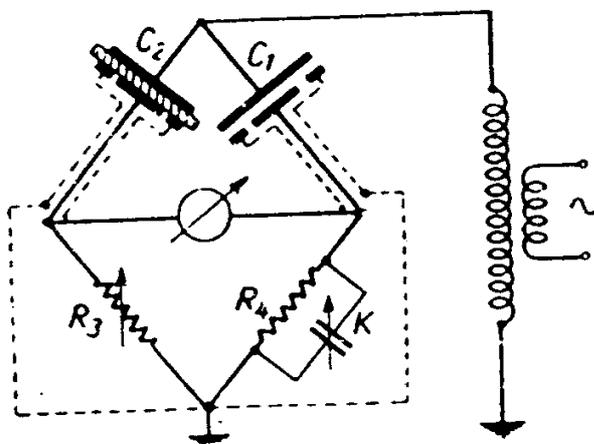


Figura 4.48:

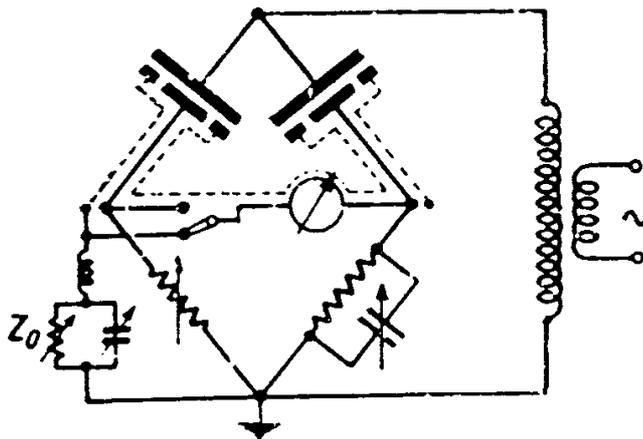


Figura 4.49:

Questi schermi sono messi a terra, come il vertice inferiore del ponte, che è poi uno dei due vertici dell'alimentazione. Dato che le impedenze dei due condensatori sono di gran lunga maggiori delle impedenze dei due lati resistivi, quasi tutta la tensione applicata si esaurisce nei due condensatori, sicché la differenza di potenziale fra i vertici di galvanometro e la terra risulta piccola (questa disposizione si allontana da quella di massima sensibilità, ma è consigliabile per la sicurezza dell'operatore e per diminuire le cause di disturbo).

Si osserva però che la capacità fra i due tronchi schermati e gli schermi sono rappresentabili con due condensatori derivati fra i vertici di galvanometro e la terra e quindi in parallelo con i lati resistivi del ponte. Si tratta certo di capacità piccolissime, che possono tuttavia introdurre degli errori specialmente in media frequenza, ma anche talvolta con frequenza industriale, specialmente quando è molto piccolo l'angolo di perdita del condensatore in esame, perché la capacità K risulta piccolissima e quindi si avvicina all'ordine di grandezza della corrispondente capacità parassita. In questo caso conviene dare agli schermi un potenziale uguale a quello dei due vertici di galvanometro (in equilibrio); a tale fine lo schermo non è collegato a terra direttamente, ma attraverso una impedenza Z_0 , regolabile in valore e angolo, detta *impedenza di bilanciamento* e costituita di solito da un induttore in serie con un arco doppio resistore-condensatore (figura 4.49). Il galvanometro a sua volta può essere connesso a un commutatore sia fra i vertici corrispondenti del ponte, in inserzione normale, sia fra uno dei due vertici e lo schermo, per il bilanciamento.

Portato il ponte in equilibrio normalmente, si sposta il commutatore sulla posizione di bilanciamento e si regola il potenziale dello schermo, fino a quando il galvanometro torna a zero. Poiché questa operazione può avere squilibrato il ponte, le due operazioni di equilibratura del ponte e di bilanciamento dello schermo vanno ripetute alternativamente più volte, finché si ottiene l'azzeramento del galvanometro contemporaneamente nelle due condizioni. In tale modo il ponte è in equilibrio e lo schermo si trova al potenziale del galvanometro; non vi può quindi essere nessun passaggio di corrente dielettrica fra galvanometro e lo schermo e la loro capacità mutua è senza effetti.

Nel caso delle medie frequenze gli accoppiamenti capacitivi assumono maggiore importanza; in particolare non è più possibile supporre le capacità dei vari elementi che costituiscono il circuito come concentrati in un punto, ma è necessario considerarle, come in realtà distribuite (figura 4.50a) e in generale variabili con la posizione degli oggetti circostanti.

Perciò, in media frequenza, ogni elemento costituente il circuito di misura, viene schermato singolar-

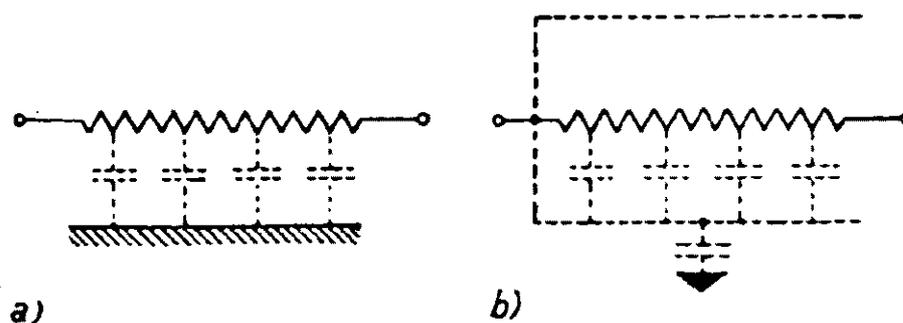


Figura 4.50:

mente con un tubo metallico che va collegato a uno dei morsetti dell'oggetto stesso (figura 4.50b). In tal modo la capacità distribuita risulta derivata verso lo schermo e quindi definita e invariabile, sicché se ne può tenere conto nella determinazione dell'impedenza dell'oggetto. Inoltre la capacità verso l'esterno risulta tutta riportata a un estremo, il che semplifica notevolmente lo studio della sua influenza sulla misura.

A sua volta questa capacità verso l'esterno può essere resa fissa circondando i vari elementi schermati con un secondo schermo messo a terra. La disposizione e i collegamenti degli schermi variano da caso a caso, devono essere studiati di volta in volta in modo da eliminare o governare le ammettenze derivate che possono influire sulla precisione della misura.

Uno schema generico di ponte con doppia schermatura è rappresentato nella figura 4.51, dove ogni lato del ponte è rappresentato con un'impedenza schermata; una seconda schermatura generale circonda le precedenti e le connessioni del ponte ed è messa a terra. Il generatore di alimentazione e l'indicatore di zero sono collegati al ponte per mezzo di trasformatori di isolamento, pure schermati.

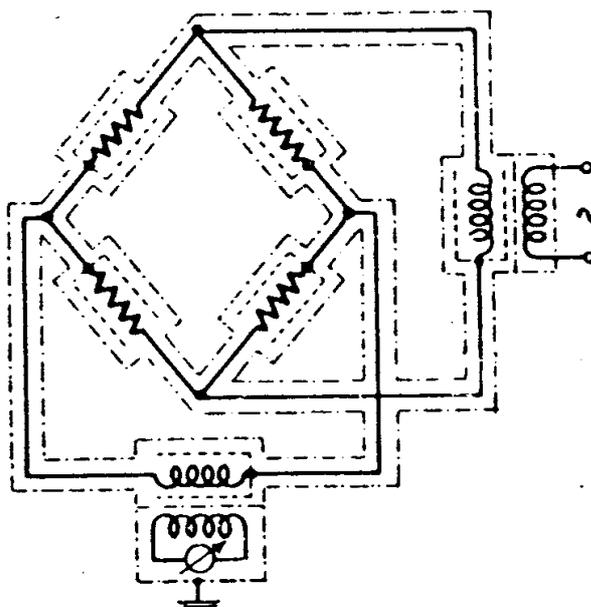


Figura 4.51:

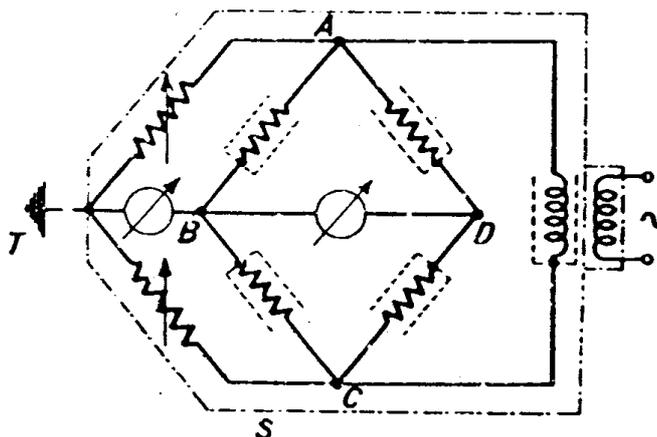


Figura 4.52:

Poiché gli schermi dei singoli lati riportano ai vertici del ponte le ammettenze derivate verso terra, torna vantaggioso eliminare gli effetti di qualcuna di queste ammettenze annullando la differenza di potenziale fra vertici corrispondenti e terra.

Si è già illustrato il procedimento dello schermo bilanciato solitamente usato in bassa frequenza, che consiste nel portare lo schermo potenziale dei vertici di galvanometro. In media frequenza si adopera più spesso un sistema reciproco, detto della *messa a terra di Wagner*, rappresentato in figura 4.52.

Il procedimento richiede un ponte ausiliario costituito dai due lati \overline{AB} e \overline{BC} del ponte principale e dalle due impedenze regolabili \overline{AT} e \overline{CT} ; questo ponte deve essere azzerato insieme con il ponte principale e l'operazione di azzeramento dei due ponti può anche venire effettuata alternativamente, con lo stesso galvanometro, passando ripetutamente dall'una all'altra inserzione.

Quando i due ponti sono equilibrati i due vertici B e D del ponte principale sono al potenziale di terra, come lo schermo generale S (rappresentato per chiarezza di disegno col solo contorno esterno); la loro ammettenza verso terra è perciò senza effetti sulla misura.

Gli schermi elettrostatici, come sopra descritti, in quanto si interpongono fra i supporti materiali dei circuiti, servono anche a drenare le correnti laterali di conduzione che hanno per sostegno, invece dell'aria, appunto tali supporti, ma sono dovute alla stessa causa che determina le correnti dielettriche. Gli schermi elettrostatici assumono perciò essi stessi la funzione delle piastre e degli anelli di guardia e possono quindi essere più in generale considerati come schermi contro le ammettenze laterali di dispersione. Fanno eccezione le misure con correnti impulsive (misure balistiche), per le quali gli schermi elettrostatici devono essere tenuti distinti dalle guardie.

Dato poi il loro collegamento a terra, gli stessi schermi sono generalmente efficaci non solo contro le cause interne, ma anche contro i campi elettrici (correnti disperse) e dielettrici dovuti a cause esterne al circuito di misura.

Per completare il quadro delle protezioni contro i disturbi restano da esaminare i concatenamenti parassiti induttivi fra le parti del circuito di misura e con campi magnetici esterni. Trattandosi anzi qui di campi alternati, dobbiamo considerarli più generalmente come campi elettromagnetici, che possono determinare variazioni anche sensibili nella impedenza di qualche lato del ponte.

Diremo subito che queste cause di disturbo sono molto meno importanti delle precedenti e sono solitamente limitate a qualche parte del circuito di misura e particolarmente al generatore. La protezione contro questi disturbi può essere eseguita, circondando le parti da proteggere con una scatola di materiale ad alta permeabilità, ma poiché si tratta di campi variabili piuttosto rapidamente, il migliore sistema di schermatura consiste ancora nell'interporre fra causa disturbante e oggetto da proteggere una lastra di materiale conduttore. Le correnti parassite in esso indotte dal campo elettromagnetico tendono infatti a indebolirlo e producono perciò un effetto schermante.

A differenza di quanto avviene per gli schermi elettrostatici non è però qui più necessario che lo schermo assuma un potenziale definito o sia collegato a qualche punto particolare del circuito di misura; la sua azione schermante è infatti legata solo alle correnti parassite indotte nella massa stessa del conduttore del campo perturbatore; perciò essa è tanto maggiore quanto più grandi sono la conduttività del materiale costituente lo schermo e il suo spessore; a parità di altre caratteristiche, la permeabilità magnetica del materiale esercita pure una azione favorevole. Normalmente si usano lastre o tubi di rame dello spessore di 1mm circa.

Naturalmente l'effetto schermante cresce, a parità di altre circostanze, con la frequenza, tanto che, con le frequenze più elevate, può bastare uno schermo a gabbia invece che continuo.

Per quanto detto, gli stessi schermi elettrostatici, se costituiti di sufficiente spessore e saldati con cura in modo da non dare luogo a discontinuità, servono anche come protezione contro gli accoppiamenti parassiti elettromagnetici. La loro presenza determina però in questo caso delle perdite di energia di cui occorre talvolta tenere debito conto.

4.14 Ponti a lati di rapporto induttivi (Ponti a trasformatore)

Concettualmente simili al ponte di Gott per il confronto tra condensatori, impiegano un divisore di tensione a rapporto variabile di tipo induttivo. Pregio fondamentale di questi dispositivi, tale da qualificarli come sistemi di misura di alta precisione, è la possibilità di quantificare il rapporto del ramo induttivo mediante il conteggio delle spire. Nello schema fondamentale di figura 4.53, infatti, la condizione di equilibrio del ponte si ha quando risulta:

$$\frac{Y_x}{Y_c} = \frac{V_c}{V_x} \simeq \frac{E_1}{E_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

Affinché il rapporto di spire del divisore induttivo corrisponda, con la richiesta approssimazione, al rapporto inverso delle ammettenze si deve realizzare un divisore di tensione induttivo con le seguenti caratteristiche:

- a) che la f.e.m. per spira sia uguale lungo tutto il divisore;
- b) che la c. di t. interna al divisore induttivo sia trascurabile rispetto alle tensioni in gioco.

Le due condizioni si ottengono mediante l'impiego di nuclei magnetici torici costituiti con leghe magnetiche ad elevatissima permeabilità relativa (da 50000 a 250000) e realizzando avvolgimenti di bassa resistenza avvolti a spire strette e ben uniformi. L'impiego di schermature magnetiche facilita il contenimento del flusso utile riducendo le reattanze di dispersione.

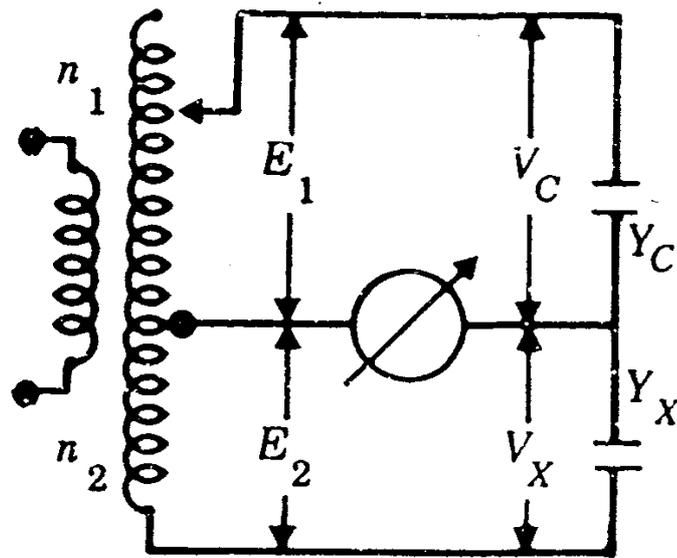


Figura 4.53: Ponte a trrsformatore.Schema di principio

Sistemi di questo genere presentano una elevata impedenza in ingresso.

Per ottenere la condizione di equilibrio, nel caso di ponti per il confronto tra condensatori campione, occorre poter regolare il rapporto spire con elevata finezza.

4.14.1 Impiego di piú condensatori campione sul ramo di riferimento

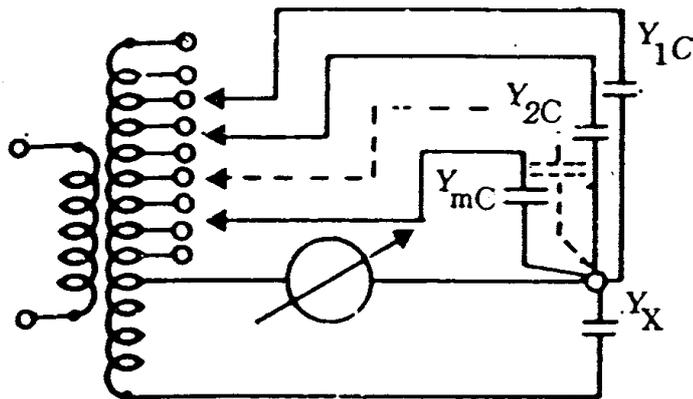


Figura 4.54: Impiego di piú condensatori campione

Poiché la condizione di equilibrio del ponte corrisponde al bilanciamento delle correnti capacitive nel nodo di galvanometro, cioè:

$$I_x = I_1c + I_2c + \dots + I_m c$$

si ottiene

$$Y_x V_x = Y_1 c V_1 c + Y_2 c V_2 c + \dots + Y_m c V_m c$$

impiegando m condensatori campione scalati di valore secondo ordini di grandezza successivi, da inserire separatamente su una tra 10 prese diverse del ramo induttivo di regolazione (uniformemente distribuite sull'avvolgimento) si ottiene anche:

$$Y_x V_x = Y_1 c \frac{\alpha_1}{10} V_c + Y_2 c \frac{\alpha_2}{10} V_c + \dots + Y_m c \frac{\alpha_m}{10} V_c$$

con V_c tensione applicata a tutto il ramo di regolazione ed $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ dei coefficienti numerici interi compresi tra 0 e 9. Infine, considerando i rapporti previsti tra gli m condensatori campione (ordini di grandezza successivi) si ha :

$$Y_x = \frac{V_c}{V_x} Y_1 c \left(\frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10} 10^{-1} + \dots + \frac{\alpha_m}{10} 10^{-(m-1)} \right)$$

La sensibilità di una simile regolazione é pari a 10^{-m} , ottenibile con l'impiego di soli m condensatori campione e con una suddivisione dell'avvolgimento del ramo di regolazione in sole 10 parti.

4.14.2 Impiego di un divisore potenziometrico tipo Thompson-Varley

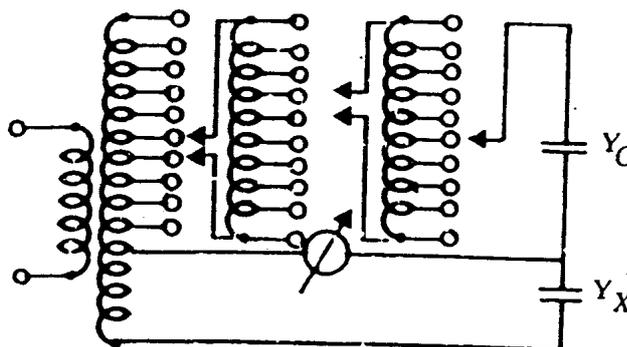


Figura 4.55: Lato di regolazione: schema Thompson-Varley

É possibile impiegare una variante induttiva dello schema di divisore potenziometrico detto di Thompson-Varley che, nella forma classica, verrà descritto nei prossimi paragrafi. Una semplificazione introdotta nello schema induttivo é che non ci si deve preoccupare degli assorbimenti di corrente provocati dalle decade successive.

Infatti, caratteristiche peculiari dei divisori induttivi sono l'elevata impedenza in ingresso e la minima impedenza in uscita.

L'influenza di una decade successiva, quando viene inserita in parallelo a un gradino della decade precedente, é praticamente nulla, in condizioni di regime. Per quanto riguarda la transizione da una posizione all'altra si provvede a limitare la corrente di inserzione con contatti ausiliari resistivi.

In questo caso, quindi, nel ponte si impiega un solo condensatore campione e la regolazione di bilanciamento viene finemente realizzata con l'impiego di un numero m di divisori in cascata (secondo

appunto lo schema Thompson-Varley) divisi in sole 10 parti, ed in numero pari alle decadi che si intendono utilizzare. Nei dispositivi di regolazione sopra descritti per ponti a lati di rapporto induttivi si impiegano normalmente da 5 a 9 decadi.

La frequenza di alimentazione di questi ponti é normalmente compresa tra 50 e 10000 Hertz con tensione applicata fino a 350 Volt. La frequenza di esercizio puó essere scelta dall'operatore, tenendo solo presente che la tensione di operazione deve essere ridotta in proporzione alla frequenza impiegata, per mantenere invariata l'induzione nei nuclei.

Una frequenza tipica per l'impiego di questi ponti é quella di 1592 Hertz, corrispondente alla pulsazione $\omega = 10000$.

A questa frequenza infatti viene effettuato il confronto tra un condensatore campione e un resistore campione di 100000 ohm nelle operazioni di trasferimento della precisione dal condensatore campione calcolabile al resistore campione.

In questi ponti, previsti per il funzionamento in media frequenza, l'impiego di elementi schermati é di rigore.

In figura 4.56 viene descritto un ponte a lati induttivi considerato fra i piú efficienti. Le capacità di schermatura sono indicate con linee a tratteggio.

$$n_1 i_1 = n_2 i_2$$

$$C_x = C_N \frac{n_2}{n_1}$$

$$\tan(\delta) = R\omega C$$

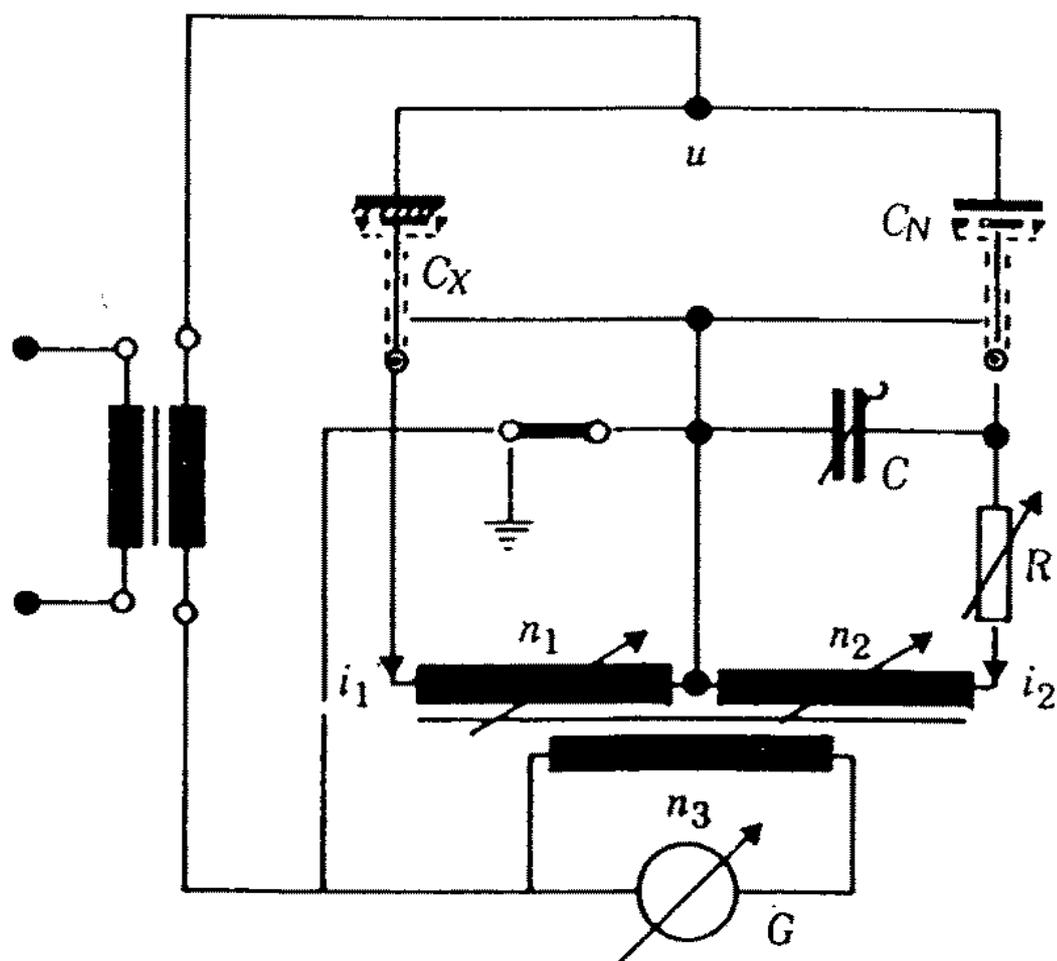


Figura 4.56: